Name: Max Mustermann **Matr.-Nr.:** 123456 **Variante:** A

Antwortbogen

Teil I

Aufgabe I.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ -2 & 14 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -17 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ -2 & 14 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_4 + z_1]{z_2 - 2\cdot z_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ -1 & 15 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_4 - 3\cdot z_2]{z_3 - z_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_4 + 2\cdot z_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$Ax = b \Leftrightarrow LRx = b \Rightarrow Ly = b$ mit $Rx = y$

$$Ly = b \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -17 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & -20 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 8 \\ y_2 = 8 - 2y_1 = -8 \\ y_3 = -17 - y_2 = -9 \\ y_4 = -20 + y_1 - 3y_2 + 2y_2 = -6 \end{array}\right\} y = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = -3 \\ x_3 = (-9 - x_4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \\ x_2 = (-8 + x_3 - 2x_4)\cdot\frac{1}{5} = 0 \\ x_1 = (8 - x_2 - 2x_3 + 2x_4)\cdot\frac{1}{2} = -1 \end{array}\right\} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe I.2 a) Sei $A = (a_1 | a_2 | \ldots | a_i | \ldots | a_j | \ldots | a_n)$.

Wir zeigen die Aussage für das Vertauschen zweier Spalten. Es gilt:

$$0 = \det(a_1|\ldots|a_i+a_j|\ldots|a_i+a_j|\ldots|a_n)$$

$$= \det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_i+a_j|\ldots|a_n) + \det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_i+a_j|\ldots|a_n)$$

$$= \det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_i|\ldots|a_n) + \det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_j|\ldots|a_n)$$

$$+ \det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_i|\ldots|a_n) + \det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_j|\ldots|a_n)$$

$$= \det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_j|\ldots|a_n) + \det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_i|\ldots|a_n),$$

da $\det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_j|\ldots|a_n) = \det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_i|\ldots|a_n) = 0$.

Also folgt:

$$\det(a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_j|\ldots|a_n) = -\det(a_1|\ldots|a_j|\ldots|a_i|\ldots|a_n). \checkmark$$

b)

$$A_n = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{z_n + \sum_{i=1}^{n-1} z_i}{=} \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & \cdots & & 2 \\ 2 & 5 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 2 & \cdots & 2 & 5 & 2 \\ 2n+3 & 2n+3 & \cdots & 2n+3 & 2n+3 \end{pmatrix}$$

N.R.
$2 \cdot (n-1) + 5 \cdot 1$
$= 2n+3$

$$= (2n+3) \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & \cdots & & 2 \\ 2 & 5 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 2 & \cdots & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}}{\overset{z_i - 2 \cdot z_n}{=}} (2n+3) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Dreiecks-matrix}}{=} (2n+3) \cdot 3^{n-1} \cdot 1 = \underline{(2n+3) \cdot 3^{n-1}}$$

Aufgabe I.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

a)

$$\det(A-\lambda E_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.\text{ Zeile}}{=} (2-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)(1-\lambda)+4] + 3\cdot[-12 - 4\cdot(-1-\lambda)]$$

$$= (2-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)(1-\lambda)+4] + \underbrace{(-24)+12\lambda}_{=-12\cdot(2-\lambda)}$$

$$= (2-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)(1-\lambda)+4-12]$$

$$= (2-\lambda)\cdot[\lambda^2-1-8]$$

$$= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2-9) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3$

zu $\underline{\lambda_1 = 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathrm{Eis}_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zu $\underline{\lambda_2 = 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathrm{Eis}_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zu $\underline{\lambda_3 = -3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 30 & 10 & 10 & 0 \\ 20 & -10 & 20 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -8 & 0 \\ 0 & -10 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathrm{Eis}_A(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Es gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Weiter gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18 \neq 0$.

Also ist A invertierbar.

Teil II

Aufgabe II.1

a)-c)

Lösungsskizze:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 4\alpha & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \overset{z_1 \leftrightarrow z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ \alpha & 4\alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \underset{z_3 - z_1}{\overset{z_2 - \alpha z_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2-3\alpha \\ 0 & 2\alpha-4 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rang 2 : $2-3\alpha = 0 \lor 2\alpha - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3} \lor \alpha = 2$

Rang 3 : $2-3\alpha \neq 0 \land 2\alpha - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{2}{3} \lor \alpha \neq 2$

$\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}, 2\}$

A invertierbar $\Leftrightarrow$ Rang(A) = 3

Ergebnis:

a) $\alpha \in \{\frac{2}{3}, 2\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}, 2\}$

c) $\mathbb{R} \{\frac{2}{3}, 2\}$

Aufgabe II.2

Lösungsskizze:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, Vektoren normieren : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9} \cdot 27 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot (-45) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$

Aufgabe II.3

a)

Lösungsskizze:

$$f(a_1-a_2) = f(a_1)-f(a_2) = {}_B\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} - {}_B\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = {}_B\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$= (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$f(2a_1+3a_3) = 2f(a_1)+3f(a_3) = 2\cdot{}_B\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + 3\cdot{}_B\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= {}_B\begin{pmatrix}-8\\-1\\3\end{pmatrix} = (-8)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$f(a_1-a_2) = \begin{pmatrix}-7\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$f(2a_1+3a_3) = \begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix}$$

b)

Lösungsskizze:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot f\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = 2\cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow {}_{E_3}M(f)_A = \begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&0&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$$

Kern von f: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\-1&0&0&0\\3&-2&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&-2&1&0\\1&0&0&0\\0&-2&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&-2&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$$\ker(f) = \left\langle {}_A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$${}_A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = {}_{E_3}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker(f) = \left\langle {}_{E_3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Ergebnis:

i)

$${}_{E_3}M(f)_A = \begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&0&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$$

ii)

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Aufgabe II.4

Lösungsskizze:	Ergebnis:
Aus (2): $\langle x, a\rangle = -x_1 + x_2 = 1 \iff x_1 - x_2 = -1$ Aus (1): $\langle (x-a), (x-a)\rangle = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 = 2$ $\iff x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_3^2 = 2$ $\iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cdot(x_1 - x_2) = 0$ mit (2) $\iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ $\iff \lVert x\rVert_2^2 = 2 \implies \lVert x\rVert = \sqrt{2}$ Aus (3): $0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\langle x, e_2\rangle}{\lVert x\rVert \cdot \lVert e_2\rVert} = \frac{1\cdot x_2}{\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{x_2}{\sqrt{2}} \implies \underline{x_2 = 0}$ $\implies x_1 - x_2 = x_1 - 0 = -1 \implies \underline{x_1 = -1}$ $\implies \lVert x\rVert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1 + 0 + x_3^2} = \sqrt{2}$ $\implies x_3^2 = 1 \implies \underline{x_3 = \pm 1}$ $\implies x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

Teil III

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die entsprechenden Kästchen ein.
⚠**Lassen Sie keine Kästchen frei!**

Aufgabe III.1

Frage	(A1)	(A2)	(A3)
a)	F	W	W
b)	F	F	W

Frage	(A1)	(A2)	(A3)
c)	F	W	W
d)	W	W	F

Lösung:

a) F W W

b) F F W

c) F W W

d) W W F

Begründung:

a) A1 Man betrachte z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A2 Die Spalten der Matrix $uu^T - vv^T$ sind jeweils Linearkombinationen der zwei Vektoren u und v, somit kann die Matrix durch elementare Spaltenumformungen auf eine Matrix mit den Spalten u und v und ansonsten nur Nullspalten transformiert werden. Damit ist der Rang der Matrix höchstens $2 < n$. Also ist die Matrix nicht invertierbar und hat Determinante 0.

A3 Für $A = 0$ ist die Gleichung für beliebige X erfüllt. Für $A \neq 0$ betrachte man z.B. die Matrizen kA für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) A1 Man betrachte z.B. $V = W = \mathbb{R}$. Die Nullfunktion, d.h. die Funktion f, mit $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ ist nicht injektiv, also ist $\mathcal{L}_{inj}(U, V)$ kein Untervektorraum.

A2 Man betrachte z.B. den Untervektorraum $\langle \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$ des Raums der reellen Polynome. Dieser ist ebenfalls ∞-dimensional, enthält aber die konstanten Polynome $\neq 0$ nicht.

A3 V enthält 5 linear unabhängige Vektoren, hat also Dimension mindestens 5, als Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ also genau gleich 5. Für Untervektorräume gleicher endlicher Dimension gilt Gleichheit.

c) A1 Z.B. die Folge, die in jedem Eintrag die 1 enthält, kann nicht aus endlich vielen Elementen der Menge linear kombiniert werden.

A2 Jedes Erzeugendensystem entält eine Basis. Wenn also die echten Teilmengen keine Basis sind, so muss die Menge selbst eine Basis sein.

A3 Da U und $U^\perp$ orthogonal zueinander sind, sind alle Basiselemente paarweise linear unabhängig. Jeder Vektor aus V kann als Summe eines Vektors aus U und eines aus $U^\perp$ dargestellt werden. Somit bilden die Basen auch ein Erzeugendensystem von V.

d) A1 Der Kern enthält nur die 0, also ist A invertierbar. Wähle $B = A^{-1}$.

A2 Als Folgerung der Gerschgorinkreise sind Matrizen invertierbar, falls ihre Diagonaleinträge die Summe der restlichen Zeileneinträge betragsmäßig dominieren. Dies ist hier der Fall.

A3 Für jede lineare Abbildung $f : U \to V$ gilt stets $\dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(U)$.