Name: .... **Matr.-Nr.:** .... **Variante:** B

Antwortbogen

Teil I

Aufgabe I.1

(IA) Im Fall $n=2$ gilt (1)

$$\sum_{k=2+1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \geq \frac{7}{12}.$$

(1) (IV) Es gelte

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{7}{12} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

(IS) Dann folgt "$n \to n+1$"

$$\sum_{k=n+1+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\underset{(1)}{\overset{(IV)}{\geq}} \frac{7}{12} + \frac{\overset{(1)}{-2(2n+1)+2n+2+2n+1}}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{7}{12} + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \overset{(1)}{\geq} \frac{7}{12}.$$

(1) Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ nach dem Prinzip der vollst. Ind.

(1) mathem richtige Schreibweise

(B)

Aufgabe I.3 a) Nach den Rechenregeln für stetige Funktionen ist f auf $[2,4]$ stetig. (1) Das Intervall $[2,4]$ ist abgeschlossen. (1) Nach dem Satz (1) von Minimum und Maximum nimmt f auf $[2,4]$ ein Maximum und Minimum an.

b) Kritische Punkte: $f'(x)=0$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\frac{(x^2-x+4)'(x-1)-(x^2-x+4)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\overset{(2)}{=}0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \qquad p=-2,\ q=-3 \qquad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x_1=-1,\ x_2\overset{(1)}{=}3,\ \overset{(1)}{-1}\notin[2,4]$$

1. Möglichkeit

f': $-$ (auf $(2,3)$), lok.min bei 3, $+$ (auf $(3,4)$)

f: 2 $\searrow$ 3 $\nearrow$ 4

$f'(x)<0\ \forall x\in(2,3)$

$f'(x)>0\ \forall x\in(3,4)$

$\Rightarrow x_2=3$ ist lokale Minimalstelle (1)

$$f(3)=\frac{9-3+4}{3-1}=5 \ (1)$$

2. Möglichkeit

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

$$f''(3)=\frac{4\cdot 4-2\cdot 2\cdot 0}{16}=1>0$$

$\Rightarrow x_2=3$ ist lokale Minimalstelle (1)

Randpunkte:

$$f(2)=\frac{4-2+4}{2-1}=6 \ (1) \qquad f(4)=\frac{16-4+4}{3}=5\frac{1}{3} \ (1)$$

Vergleichen wir die Funktionswerte

$$f(3)=5,\quad f(2)=6,\quad f(4)=5\frac{1}{3},$$

so wird deutlich, dass ein globales Minimum bei (1) $x=3$ liegt und den Wert 5 besitzt, ein globales Maximum bei $x=2$ (1) liegt und den Wert 6 hat.

(B)

Aufgabe I.2

a) Nach den Rechenregeln für stetige und differenzierbare Funktionen ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ stetig und differenzierbar. (1)

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 2$ stetig, wenn gilt:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3+1) = 9 \quad (1) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (ax+b) = 2a+b \ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+b=9 \ (1)$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar wenn die folgende Grenzwerte existieren und es gilt

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+1-9}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(1)\ L'H}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2}{1} \overset{(1)}{=} 12$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{ax+b-9}{x-2} = \left[\frac{2a+b-9}{2-2} = \frac{0}{0}\right] \overset{(1)\ L'H}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{a}{1} \overset{(1)}{=} a$$

$$\Rightarrow a = 12 \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2a+b=9 \\ a=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 9-2\cdot 12 = -15 \\ a=12 \quad (1) \end{cases}$$

b) Beweis: Sei $x \in (0,1)$

B

Zu zeigen: $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x) \iff \lim\limits_{h\to 0} (g(x+h)-g(x)) = 0$

Es gilt

$$\lim_{h\to 0} (g(x+h)-g(x)) = \lim_{h\to 0} h\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ existiert und

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ existiert auch, denn g ist in x differenzierbar

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0\cdot g'(x) = 0$$

Also $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$.

(B)

Teil II

Aufgabe II.1

a)

Lösungsskizze:

$p(2i)=0 \overset{1}{\Rightarrow} p(-2i)=0$

$p(x) = (x-2i)(x+2i)g(x) = (x^2+4)g(x)$

$$\begin{array}{l} x^4-4x^3-8x^2-16x-48 : (x^2+4) = x^2-4x-12 \\ -(x^4 +4x^2) \\ \hline -4x^3-12x^2-16x \\ -(-4x^3 -16x) \\ \hline -12x^2 -48 \\ -(-12x^2 -48) \\ \hline 0 \end{array}$$

$g(x) \overset{2}{=} x^2-4x-12 \quad p=-4 \quad q=-12$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4}+12}$

$x_1 \overset{1}{=} -2 \quad x_2 \overset{1}{=} 6$

Ergebnis:

$\{2i; -2i; -2, 6\}$

5

b)

Lösungsskizze:

$z \overset{1}{=} \left[\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}\right]^9 = \left[\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}\right]^9$

$\overset{1}{=} \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 \overset{1}{=} \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^9$

$\overset{1}{=} \cos(3\pi)+i\sin(3\pi) \underset{1}{=} -1$

Ergebnis:

-1

5

B

Aufgabe II.2

a)

Lösungsskizze:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{7}\right)^k \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^k \overset{(2)}{=} \frac{1}{1-\frac{3}{7}} \overset{(1)}{=} \frac{7}{4}$$

Ergebnis: $\frac{7}{4}$ (4)

b)

Lösungsskizze:

$$R \overset{(1)}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}\left(\sqrt{n^2+20n}-\sqrt{n^2+11}\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\cdot\frac{n^2+20n-(n^2+11)}{\sqrt{n^2+20n}+\sqrt{n^2+11}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\cdot\frac{20-\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{20}{n}}+\sqrt{1+\frac{11}{n^2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{(1)+(1)} 1\cdot\frac{20}{1+1} \overset{(1)}{=} 10;\quad R=\frac{1}{10}$$

$\sqrt[n]{n}$ Rest

Ergebnis: $\frac{1}{10}$ (6)

Aufgabe II.3

a)

Lösungsskizze:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

zum (1)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\ (1) = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}+1}\ (1) \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}$$

Ergebnis: $-\frac{1}{2}$ (5)

b)

Lösungsskizze:

$$\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} \overset{(1)}{=} e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{(1)}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{\underset{(1)}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{1\cdot(-\sin x)}{\cos x\cdot 2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x} \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Ergebnis: $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (5)

(B)

Aufgabe II.4

a)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$\int \frac{x^2+5}{x^2-1}\,dx \overset{1}{=} \int \left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx$ $\frac{6}{x^2-1} = \frac{6}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ $6 = A(x+1) + B(x-1)$ $\quad x=1 \Rightarrow 6 = 2A \Rightarrow A \overset{1}{=} 3$ $x=-1 \Rightarrow 6 = -2B \Rightarrow B = -3$ (1) $\int \left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx = \int \left(1+\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1}\right)dx$ $\overset{2}{=} x + 3\ln\lvert x-1\rvert - 3\ln\lvert x+1\rvert$	$x+3\ln\lvert x-1\rvert-3\ln\lvert x+1\rvert$

(5)

b)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$\int \sin x \cdot \ln(\cos x+1)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x+1 \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right]$ (2) $= -\int \ln t \cdot dt = \left[\begin{array}{ll} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{1}{t}dt & v = t \end{array}\right]$ $= -\left(t\ln t - \int dt\right) = -t\ln t + t \overset{2}{=} t(1-\ln t)$ $\overset{1}{=} (\cos x+1)(1-\ln(\cos x+1))$	$(\cos x+1)(1-\ln(\cos x+1))$

(5)

Teil III

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die entsprechenden Kästchen ein.

⚠**Lassen Sie keine Kästchen frei!**

Aufgabe III.1

Frage	(A1)	(A2)	(A3)
a)	F	W	W
b)	F	W	F

Frage	(A1)	(A2)	(A3)
c)	F	F	W
d)	W	W	W

Material

a) F W W

b) F W F

c) W W W

Begründung:

a) (A1) $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, a_4 ist der höchste Koeffizient von $p(x) \Rightarrow a_4 = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 1 = -6$.

(A2) Folgt aus dem Satz über die Faktorisierung von Polynomen.

(A3) Nach dem Satz über die Polynomdivision mit Rest gilt

$$p(x) = q(x)(x-1) + r, r \in \mathbb{R} \Rightarrow p(1) = q(1) \cdot 0 + r = r$$
$$\Rightarrow r = (1-2) \cdot (2-1) \cdot (-3+2) \cdot (1+1) = 2$$

b) (A1) Man betrachte z.B. die Folge $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

(A2) $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_n = a - a = 0$

(A3) Man betrachte z.B. $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. Dann $\frac{a_n}{b_n} = 1$.

c) (A1) Man betrachte z.B. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [-1,1]$.

(A2) Sei $x_1 \neq x_2$.

$$\text{Falls } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\text{Falls } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(A3) Sei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Dann

$$x > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{5\pi}{2} - \varepsilon, \frac{5\pi}{2} + \varepsilon\right) \Rightarrow |x| = x \quad \forall x \in \left(\frac{5\pi}{2} - \varepsilon, \frac{5\pi}{2} + \varepsilon\right)$$
$$\Rightarrow \sin|x| = \sin x \quad \forall x \in \left(\frac{5\pi}{2} - \varepsilon, \frac{5\pi}{2} + \varepsilon\right)$$
$$\sin x > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{5\pi}{2} - \varepsilon, \frac{5\pi}{2} + \varepsilon\right) \Rightarrow |\sin|x|| = |\sin x| = \sin x \quad \forall x \in \left(\frac{5\pi}{2} - \varepsilon, \frac{5\pi}{2} + \varepsilon\right)$$
$$\Rightarrow g \text{ differenzierbar}$$

d) (A1) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1 = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

(A2) Sei $b_k = -a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, $b_k > 0$ und b_k fällt monoton. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ konvergiert.

(A3) Folgt aus dem Minorantenkriterium.