Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 29.07.2015

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik I

SS 2015

Variante B

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 2 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Elektronische Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner, sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(8 Pkt.)**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{7}{12} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Aufgabe I.2: **(14+5 Pkt.)**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 2, \\ ax + b, & x > 2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass f stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ in $x \in (0, 1)$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass g in $x \in (0, 1)$ stetig ist.

Aufgabe I.3: **(3+10 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

a) Begründen Sie, warum Maximum und Minimum von f auf $[2, 4]$ existieren müssen.

b) Bestimmen Sie alle globalen Maximal- und Minimalstellen sowie Maxima und Minima von f auf $[2, 4]$.

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 48$, wobei Sie verwenden dřufen, dass $p(2i) = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^9$.

Aufgabe II.2: **(4+6 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\sqrt{n^2+20n} - \sqrt{n^2+11}\right)^n (x+1)^n$.

Aufgabe II.3: **(5+5 Pkt.)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right), \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Aufgabe II.4: **(5+5 Pkt.)**

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^2-1}\,dx$.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \sin x \cdot \ln(\cos x + 1)\,dx$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Sei $p(x) = (x-2)(2x-1)(-3x+2)(x+1)$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Der höchste Koeffizient von $p(x)$ ist 2.

(A2) Das Polynom $p(x)$ hat 4 Nullstellen.

(A3) Die Division von $p(x)$ durch $x-1$ ergibt den Rest 2.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Jede beschränkte Folge konvergiert.

(A2) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann bildet die Folge der Differenzen $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(A3) Für alle Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

c) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Falls f stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

(A2) Falls f streng monoton wachsend ist, dann ist f injektiv.

(A3) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |\sin(|x|)|$ ist im Punkt $x_0 = \frac{5\pi}{2}$ differenzierbar.

d) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(A2) Besitzt die Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nur negative Glieder und wächst sie monoton, so konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.

(A3) Gibt es eine divergente Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so divergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.