Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis) **Aachen, den 16.02.2013**
Prof. Dr. Y. Guo

Klausur zur Höheren Mathematik I

WS 2012/2013

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1-III.4) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	**(1)**	**(2)**	**Punkte**
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	**(1)**	**(2)**	**Punkte**
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(11 Pkt.)**

Es sei die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ mit $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$ gegeben. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = 3^{n-1} A.$$

Aufgabe I.2: **(11 Pkt.)**

Es sei die (2×2)-Matrix A gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, und weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine explizite Formel für die n-te Potenz A^n der Matrix A an.

Hinweis: Diagonalisieren Sie zunächst die Matrix A.

Aufgabe I.3: **(11 Pkt.)**

Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $L(a_1) = b_1 - b_2$, $L(a_2) = b_1 + b_2$ und $L(a_3) = b_1$, wobei die Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ folgendermaßen definiert sind:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $A = M(\mathcal{E}_2, L, \mathcal{E}_3)$, d.h. die Matrix A, so dass $L(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Teil II

Aufgabe II.1: **(2+4+2+2 Pkt.)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu komplexen Zahlen.

a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von $z = \dfrac{5 + 6i}{2 - 4i}$.

b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen: $M = \{z \in \mathbb{C} \mid 5z\overline{z} = 20\}$.

c) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von $z = (1 + i)^8$.

d) Bestimmen Sie den Betrag von $z = \dfrac{1}{2}\left(2e^{i\frac{7\pi}{8}}\right)^3$.

Aufgabe II.2: **(2+2+4+2+4 Pkt.)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu Determinanten und Eigenwerten.

a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^3$, lösbar ist, wobei A die Matrix aus dem Teil a) ist, und $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Es sei A die Matrix aus dem Teil a). Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A in der Form $a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ an, wobei $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

d) Es sei $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bestehend aus Eigenvektoren von B.

e) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe II.3: **(2+2+2+2 Pkt.)**

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \dfrac{5n^3 - n + 3}{2n^2 - 4n^3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin(5n)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_n = \dfrac{(-3)^n + 4^{n+1}}{8(4^n + \frac{1}{2^n})}$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) $a_n = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}i\right)^n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(3+2+3+3+3 Pkt.)**

a) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) v_1, v_2, v_3 sind paarweise linear abhängig.
(A2) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.
(A3) v_1, v_2, v_3 spannen einen 3-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$ auf.
(A4) v_1, v_2, v_3 liegen in einem 4-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

b) Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$V = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) $\dim(V) = 0$. (A2) $\dim(V) = 1$. (A3) $\dim(V) = 2$. (A4) $\dim(V) = 3$.

c) Beurteilen Sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis des Vektorraums $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1,1,1)^\top \rangle = 0\}$ ist.

(A1) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(A2) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

(A3) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(A4) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch $M = \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2^2 \text{ und } x_1 x_2 \geq 0\}$. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) M ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(A2) M ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(A3) M ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

e) Wir betrachten die folgende Menge von Polynomen: $M = \{x + x^2, x^2 + x^3, \ldots, x^{n-1} + x^n, x^n + 1\}$. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Polynome in M bilden eine Basis aller reellen Polynome vom Grad höchstens n.
(A2) Die Polynome in M sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$).
(A3) Die Polynome in M spannen einen n-dimensionalen Unterraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n auf.

Aufgabe III.2: **(3+2+3+3 Pkt.)**

a) Es seien die Abbildungen $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ und $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \\ x - y \end{pmatrix}, \qquad f_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}) = z_4$$

gegeben. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) f_1 ist linear. (A2) f_2 ist linear. (A3) $f_2 \circ f_1$ ist linear, wobei $(f_2 \circ f_1)(x, y) := f_2(f_1(x, y))$.

b) Beurteilen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear ist.

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (\alpha^2 - 2\alpha + 1)|x - y| \\ \alpha y - \alpha x \end{pmatrix}.$$

(A1) Für alle negativen α. (A2) Für alle α. (A3) Für $\alpha = 0$. (A4) Für $\alpha = 1$.

c) Es sei $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ die Basiswechselmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Hierbei seien $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^3$, und

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) $f(a_1 + a_2) = b_1 - 2b_2 + 5b_3$. (A3) $f(a_1 - a_3 + a_2) = -3b_1 - 3b_2$.
(A2) $f(a_2) = -b_1 - b_2 - b_3$. (A4) $f(a_1 + 2a_2) = b_1 + 2b_2$.

d) Es sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ bildet eine Basis des Bildes von f.

(A2) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ bildet eine Basis des Bildes von f.

(A3) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen das Bild von f auf.

(A4) Der Kern von f besteht nur aus dem Nullvektor.

Aufgabe III.3: **(2+2+2 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt einen reellen Eigenwert.
(A2) Falls $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von einer Matrix A ist, so ist $\frac{1}{2}\lambda$ Eigenwert der Matrix $2A$.
(A3) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt einen Eigenvektor genau dann, wenn $\det(A - E) = 0$ gilt.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren.
(A2) Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar.
(A3) Jede Drehmatrix besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

c) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit den jeweiligen Grenzwerten a und b. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$.
(A2) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (b \cdot a_n) = b \cdot a$.
(A3) Es gibt ein $M > 0$, so dass $|a_n - b_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe III.4: **(4 Pkt.)**

Es seien die folgenden Matrizen M, A und B gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{-18} & \mathbf{-2} & \mathbf{-16} \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & \mathbf{8} & 1 & \mathbf{9} \\ 3 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \\ 6 & \mathbf{6} & -4 & \mathbf{-1} \\ 3 & \mathbf{1} & 8 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass die Matrizen A und B sich durch elementare Spalten-/Zeilenumformungen aus M ergeben. Sie können benutzen, dass $\det(M) = 1016$ ist. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es ist $\det(A) = -2032$.
(A2) Es ist $\det(B) = 1016$.
(A3) Es ist $\det(-M^\top) = 1016$.
(A4) Es ist $\det(A) = 2032$.
(A5) Es ist $\det(B) = 2032$.
(A6) Es ist $\det(M^\top) = 1016$.
(A7) Es ist $\det(A) = -508$.
(A8) Es ist $\det(B) = -1016$.
(A9) Es ist $\det(-M) = 1016$.