Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Y. Guo

Aachen, den 31.01.2013

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik I

WS 2012/2013

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Lösungsbogen stehen! Die einzelnen Teile werde wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld Lösungsskizze einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein.

III: (Aufgaben III.1-III.3) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Bitte schreiben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu Teil III auf den Antwortbogen. Nutzen Sie dafür Ihr eigenes Konzeptpapier.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Aufgabe I.2: **(5+4+2 Pkt.)**

Wir betrachten die durch die Matrix M gegebene Drehung um die Achse $g : \overrightarrow{OX} = \alpha c$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} (18+16\sqrt{3}) & -20 & (24-12\sqrt{3}) \\ 20 & 25\sqrt{3} & -15 \\ (24-12\sqrt{3}) & 15 & (32+9\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix P, so dass $M = PDP^{\top}$ ist, wobei D eine Drehung um die x-Achse beschreibt.

b) Bestimmen Sie die Matrix D.

c) Bestimmen Sie den Winkel der Drehung, die durch die Matrix M beschrieben wird.

Aufgabe I.3: **(11 Pkt.)**

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sei die Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{, falls } 1 \le i = j \le n, \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante von A_n mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und den Rechenregeln der Determinante.

Teil II

Aufgabe II.1: **(2+2+2+3 Pkt.)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu komplexen Zahlen.

a) Es sei $z \in \mathbb{C}$ definiert über die Gleichung $\left[\frac{1+4i}{4+6i} - \frac{2i}{2+3i}\right] \overline{z} = -\frac{1}{2}i$. Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von z.

b) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von $z = (1-\sqrt{3}i)^9$.

c) Bestimmen Sie den Betrag von $z = \left(8e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

d) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen: $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z^2) \ge 0\}$.

Aufgabe II.2: **(2+3+2+2+2 Pkt.)**

Es sei $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit den folgenden Daten:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu der linearen Abbildung L.

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{E}_2, L, \mathcal{A})$.

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{B}, id, \mathcal{E}_2)$.

c) Drücken Sie $M(\mathcal{B}, L, \mathcal{A})$ mit Hilfe der Matrizen $M(\mathcal{E}_2, L, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{B}, id, \mathcal{E}_2)$ aus.

d) Entscheiden Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ im Kern von L liegt.

e) Geben Sie eine Basis des Bildes von L an.

Aufgabe II.3: **(3+2+3 Pkt.)**

a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Form $a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0$ an, wobei $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die folgende Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte?

$$B = \begin{pmatrix} 4\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren zur Matrix B aus b), wobei $\alpha = 1$ gewählt sei.

Aufgabe II.4: **(2+2+2+3 Pkt.)**

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \dfrac{n^3 + 7}{n^4 + n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n = \dfrac{2^n + 4}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_n = \dfrac{i^n}{n + 1} \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert mit

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Gehen Sie davon aus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Teil III

Aufgabe III.1: **(2+3+3+3 Pkt.)**

a) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) v_1, v_2, v_3 sind paarweise linear abhängig.
(A2) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.
(A3) v_1, v_2, v_3 spannen einen 3-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$ auf.
(A4) v_1, v_2, v_3 liegen in einem 4-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) v_1, v_2, v_3 spannen unabhängig von α einen 3-dimensionalen linearen Raum auf.
(A2) v_1, v_2, v_3 spannen unabhängig von α einen affinen Unterraum auf.
(A3) v_1, v_2, v_3 sind genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \in \{-3, 0\}$.
(A4) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 paarweise orthogonal sind.

c) Es seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 5\right\},$$

$$M_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_3 = x_2\right\} \cup \operatorname{Span}\left((1,1,1)^\top\right)$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) M_1 ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(A2) M_1 ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(A3) M_1 ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.
(A4) M_2 ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(A5) M_2 ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(A6) M_2 ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

d) Wir betrachten die folgende Menge von Polynomen: $M = \{1, 2x, 3x^2, 4x^3 \ldots, (n+1)x^n\}$. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Polynome in M bilden eine Basis aller reellen Polynome vom Grad höchstens n.
(A2) Die Polynome in M sind linear unabhängig (über $\mathbb{R}$).
(A3) Die Menge M bildet einen Unterraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n.

Aufgabe III.2: **(3+3 Pkt.)**

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und es seien die Abbildungen $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_1(z) = \overline{z}, \qquad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x - 5y \\ y - x \\ x + 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha^2 y \\ \alpha^3 x + \alpha y + 5y \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) f_1 ist linear. (A2) f_2 ist linear.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) f ist linear für $\alpha = 1$.
(A2) f ist linear für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(A3) Es gibt ein α, so dass f die Nullabbildung ist.
(A4) f ist nicht linear für $\alpha = \sqrt{2}$ oder $\alpha = \sqrt{3}$.

Aufgabe III.3: **(3+3+5+3 Pkt.)**

a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie jeweils, ob eine Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems gegeben ist.

(A1) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (A3) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(A2) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (A4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, eine eindeutige Lösung besitzt, wobei A wie folgt gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A1) $\alpha = 0$. (A2) $\alpha = -3$. (A3) $\alpha \in \mathbb{N}$. (A4) $\alpha = 3$. (A5) $\alpha \in \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0,\, a \neq -3\}$.

c) Bestimmen Sie, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^4$, eine Lösung besitzt, wobei A und b wie folgt gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\alpha + 1 \\ 2\alpha - 4 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(A1) $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. (A2) $\alpha = -1$ und β beliebig. (A3) $\alpha = 1$ und $\beta > 0$. (A4) $\alpha = \beta$.
(A5) $\alpha = 1$ und β beliebig.

d) Es seien A, B zwei 2×2-Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) $\det(B) = 4$. (A2) $\det(B) = \frac{5}{4}$. (A3) $\det(B) = 0$. (A4) $\det(B) = \det(A)$.