Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 31.07.2013

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik I

SoSe 2013

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1-III.3) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aufgabe I.2: **(12 Pkt.)**

Es sei die folgende (2×2)-Matrix A gegeben duch

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte zusammen mit den zugehörigen Eigenräumen der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine (2×2)-Matrix B, so dass gilt: $A = B \cdot B$. Es sei B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Einträge $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$ explizit an.

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**

Es seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

$$L(a_1) = b_1, \quad L(a_2) = b_2, \quad L(a_3) = b_1 + b_2.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $A = M(\mathcal{E}_2, L, \mathcal{E}_3)$, d.h. die Matrix A, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $L(x) = Ax$ gilt.

Teil II

Aufgabe II.1: **(2+4+2+2 Pkt.)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu komplexen Zahlen.

a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen:
$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} \leq 2,\ \mathrm{Im}(z - \overline{z}) \leq 1\}$.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 4\sqrt{3} + 4i$.

c) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von $z = \dfrac{-4}{(i+1)^3}$.

d) Bestimmen Sie das Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ von $z = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \cdot \left(2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2$.

Aufgabe II.2: **(4+2+2+2+2 Pkt.)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu Determinanten, Eigenwerten und Eigenvektoren.
Es sei die folgende (3×3)-Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ der Matrix A und geben Sie es in der Form $p(\lambda) = (-1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ an.

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

c) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 3 der Matrix A.

d) Es sei $B = A - E$, wobei E die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Bx = 0$.

e) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden (5×5)-Matrix C gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.3: **(2+2+4+2 Pkt.)**

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \dfrac{2^n \cdot \binom{n+1}{2}}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{(a_n - 1)^2}{2a_n - 1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei a und b positive reelle Zahlen mit $a \geq b$ sind.

Aufgabe II.4: **(2+2+2 Pkt.)**

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien eine Gerade g und eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ wie folgt definiert:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ bt \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax_1 - x_2 + cx_3 = 0 \right\}.$$

a) Für welche Parameterwerte a, b, c schneiden sich g und E überhaupt nicht?

b) Für welche Parameterwerte a, b, c schneiden sich g und E in genau einem Punkt?

c) Für welche Parameterwerte a, b, c ist g in E enthalten?

Teil III

Aufgabe III.1: **(2+2+2+3+3 Pkt.)**

a) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.
(A2) v_1, v_2, v_3 spannen einen 3-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$ auf.
(A3) Der von v_1, v_2, v_3 aufgespannte Teilraum enthält den Nullvektor.

b) Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch $V = \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\, x_2 \geq 0\}$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) V ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(A2) V ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(A3) V enthält den Nullvektor.

c) Beurteilen Sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem des linearen Unterraums $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1,2,2)^\top \rangle = 0\}$ ist.

(A1) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(A2) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(A3) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Es sei P der von den Polynomen $x - x^2$, $x^2 - x^3$, $x^3 - x^4$, $x^4 - 1$ (über $\mathbb{R}$) aufgespannte Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 4.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Das Polynom $x + 1$ ist in P enthalten.
(A2) Jedes Polynom vom Grad 4 liegt in P.
(A3) P ist ein 4-dimensionaler Unterraum des Raumes aller Polynome vom Grad höchstens 5.

e) Wir betrachten für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & \beta & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Das Gleichungssystem besitzt unabhängig von α, β, γ eine Lösung.
(A2) Für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist die Lösungsmenge ein 2-dimensionaler linearer Unterraum des $\mathbb{R}^4$.
(A3) Für $\gamma \neq 0$ ist die Lösungsmenge ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe III.2: **(2+2+3+3 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass v_3 senkrecht auf v_1 und v_2 steht und weiter $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
(A2) Für jeden linearen Unterraum V von $\mathbb{R}^3$ gibt es eine orthonormale Basis.
(A3) Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ steht senkrecht auf dem Nullvektor.

b) Wir betrachten die Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) M ist eine orthogonale Matrix, d.h. $MM^\top = E$, wobei E die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichnet.
(A2) Die Spalten von M bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.
(A3) Die Spalten von M sind paarweise orthogonal.
(A4) Die Spalten von M bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2\alpha & 6\beta \\ 4\alpha & 3\beta \end{pmatrix}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von A orthogonal.
(A2) Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass A eine Drehmatrix ist.
(A3) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Zeilen von A orthogonal.

d) Es sei $D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \angle(x, (1,1,1)^\top) = \frac{\pi}{6},\ |x| = 2 \right\}$, wobei $\angle(\cdot,\cdot)$ den Winkel zwischen zwei Vektoren bezeichne.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Der Vektor $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^\top$ liegt in D.
(A2) D enthält unendlich viele Elemente.

Aufgabe III.3: **(3+2+3 Pkt.)**

a) Es sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Der Kern von L ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(A2) Das Bild von L ist ein Vektorraum V mit $\dim(V) \le 2$.
(A3) Der Nullvektor liegt im Kern von L.

b) Es sei $V = \mathbb{R}^4$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Der Schnitt zweier linearer Unterräume von V ist stets wieder ein linearer Unterraum.
(A2) Es gibt zwei affine Unterräume von V deren Schnitt ein linearer Unterraum ist.
(A3) Jeder affine Unterraum von V ist auch ein linearer Unterraum.

c) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit den jeweiligen Grenzwerten a und b.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Folge $((a_n - b_n)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $(a-b)^2$.
(A2) Es gibt ein $M > 0$, so dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(A3) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.