Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 21.02.2015

Klausur zur Höheren Mathematik I

WS 2014/15

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(8 Pkt.)**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \text{ mit } n\geq 2.$$

Aufgabe I.2: **(5+3+8+6 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<-1,\\ -x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & -1\leq x<3,\\ 2(x-4)^2+1, & x>3.\end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit!

b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x=3$ stetig ergänzbar ist.

c) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, so dass f in x differenzierbar ist!

d) Seien $b>a$ zwei reelle Zahlen und $y,z:(a,b)\to\mathbb{R}$ in $t\in(a,b)$ differenzierbar. Beweisen Sie: Dann ist auch $y\cdot z$ in t differenzierbar und es gilt

$$(y\cdot z)'(t)=y'(t)\cdot z(t)+y(t)\cdot z'(t).$$

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1=2 \qquad a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{2+a_n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert a.

Teil II

Aufgabe II.1: **(6+6 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \left(\frac{2+4i}{3+i}\right)^{10}$.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 + \frac{i}{8} = 0$.

Aufgabe II.2: **(4+6 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+(-2)^k}{4^{k-1}}$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^{k+1}}(x-2)^k$.

Aufgabe II.3: **(5+5 Pkt.)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(\cos(x^3))}{\sin(x^6)}$, b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} - \frac{1}{e^{2x}-1}$.

Aufgabe II.4: **(4+4 Pkt.)**

a) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{7x-1}{x^2-1}\,dx$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int \sinh(x)\cosh(x)e^{\cosh(x)}\,dx$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist p genau dann ein reelles Polynom, wenn für alle $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(x_0) = 0$ gilt: $p(\overline{x_0}) = 0$.

(A2) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}(\sin(\frac{1}{x}) + \pi)$ hat in 0 eine Polstelle.

(A3) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\frac{3771}{2}\pi + x) = \cos(\frac{1592}{4}\pi + x)$.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(-x)$ konkav ist.

(A2) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) < g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$, so gilt stets $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

(A3) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $f : (a - R, a + R) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare konvexe Funktion mit Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$ und Konvergenzradius $R > 0$, so gilt stets $a_2 \geq 0$.

c) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare konvexe Funktion.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A2) Besitzt f ein lokales Minimum, so ist dieses auch ein globales Minimum.

(A2) f nimmt stets ein Maximum auf (a, b) an.

(A3) f nimmt stets ein Minimum auf (a, b) an.

d) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(a^n - b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} (-1)^k a^{n^2 - kn} b^k$.

(A2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = x$.

(A3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert stets der Grenzwert
$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k + \sin(k) - 1}{2n}) \cdot \frac{1}{n}$.