Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 21.02.2015

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik I

WS 2014/15

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:
Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{x}{2-x}$. Dann gilt für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{(x-2)^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe I.2: **(3+9 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 6] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x^2 - 18)(x^2 - 32)$.

a) Begründen Sie, warum Maximum und Minimum von f auf $[-1, 6]$ existieren müssen.

b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen sowie Maxima und Minima von f auf $[-1, 6]$.

Aufgabe I.3: **(4+14 Pkt.)**

a) Beweisen Sie: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall I und $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) stetig differenzierbar mit $\phi([a, b]) = J \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

b) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int \frac{4x^3 - 16x^2 + 17x - 28}{(x^2+4)(x-3)(x-4)}\, dx.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(6+4 Pkt.)**

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2015}$.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(x)=x^4-5x^3+7x^2-5x+6$, wobei Sie verwenden dürfen, dass $p(i)=0$ gilt.

Aufgabe II.2: **(3+2+5 Pkt.)**

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \dfrac{n^2}{(3n^2-2n)\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)^n}$, b) $a_n = \dfrac{2n^3-3in}{-2n+3in^3}$, c) $a_n=\sqrt{4n^2-3n}-2n$.

Geben Sie bei $b)$ den Grenzwert in der Form $a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$, an.

Aufgabe II.3: **(8+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$ für die die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{\sqrt{k^2-1}}$ konvergiert.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{k^2-k}$.

Aufgabe II.4: **(5+3 Pkt.)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(\sqrt{x})}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(\sin(3x))}{e^x-1}$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist $a_n = n^3 + 2n + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-3| < 1$.

(A2) Ist $q \geq 1$, so gilt stets $2q \geq \sqrt[n]{1+nq}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(A3) $\forall x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] : |\cos(x)| \leq \frac{3}{4}$

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist f stets konvex, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = -f'(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f stets gerade.

(A3) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) < g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$, so gilt stets $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

c) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist $D = \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|f^{(n)}(x)| < \alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt stets $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A2) Ist $D = (a-R, a+R)$ und f eine streng monoton wachsende Funktion mit Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ und Konvergenzradius R, so gilt stets $a_1 \geq 0$.

(A3) Ist $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f stets eine ungerade Funktion.

d) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-1/x^2}$ lässt sich in $x = 0$ stetig fortsetzen.

(A2) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x^{1/4}, & x \geq 0 \\ (-x)^{1/3}, & x < 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in $x = 0$.

(A3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{y \to 0} \frac{e^{x+y}\cos(x+y)(x+y)^2 - x^2 e^x \cos(x)}{y}$.