Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Sjoerd Dirksen
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 04.03.2017

Klausur zur Höheren Mathematik I

WS 2016/17

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage zwei Punkte und für eine richtige Begründung sechs Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(26 Pkt.)**

Beweisen Sie die folgende Ungleichung mit vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$:

$$n! \geq 2^{n-1}(n-2)^2.$$

Aufgabe I.2: **(26 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^{k+2}}(x-2)^k$ konvergiert. Bestimmen Sie außerdem die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche absolute Konvergenz vorliegt.

Aufgabe I.3: **(28 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x^2) - \frac{1}{2}x^2$. Bestimmen Sie alle Extremstellen von f und geben Sie jeweils an, um welche Art von Extremstelle es sich handelt (Minimalstelle oder Maximalstelle, lokal oder global). Geben Sie für jede Extremstelle auch den zugehörigen Funktionswert von f an. (Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung verwenden, dass $3 < \pi < 4$ gilt.)

Teil II

Aufgabe II.1: **(20+10 Pkt.)**

a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral

$$\int (\sqrt{6}x)^2 (\ln(\sqrt{x}))^2 \, dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2+1} \, dx.$$

Aufgabe II.2: **(16 Pkt.)**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{2x^2 \sin(2x)}.$$

Aufgabe II.3: **(18 Pkt.)**

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3}+1)i}{2+2i} \right)^{1000}.$$

Aufgabe II.4: **(16 Pkt.)**

Bestimmen Sie geeignete reelle Zahlen a und b, so dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1)^3 + b, & x \leq 0, \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist.

Teil III

Aufgabe III.1: **(8+8+8+8+8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f konvex oder konkav.

b) Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ 4-mal stetig differenzierbar und $T_{3,0}$ das Taylorpolynom vom Grad 3 zu f an der Entwicklungsstelle 0. Sei die 4-te Ableitung von f durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. Dann ist für alle $x \in (-1, 1)$ der Approximationsfehler $|f(x) - T_{3,0}(x)|$ höchstens $|x|^4/48$.

c) Wenn eine konvergente Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele positive und unendlich viele negative Folgenglieder besitzt, dann konvergiert sie gegen 0.

d) Sind $a < b$ reelle Zahlen und ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die kein Maximum annimmt, dann ist f unbeschränkt.

e) Für alle Aussagen A, B und C ist die folgende Aussage wahr:

$$A \vee B \vee C \implies (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$