Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Sjoerd Dirksen
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 10.02.2017

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik I

WS 2016/17

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(28 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass die wie folgt rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert a:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n^2 + 3},\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe I.2: **(28 Pkt.)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x^4 + 4x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x^2+1)^2}\, dx.$$

Aufgabe I.3: **(24 Pkt.)**

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\ln\left(\frac{|1+2x|}{2e}\right) \leq \frac{1}{2}\ln(1 + |x-1|) - 1.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(15 Pkt.)**

Bestimmen Sie alle $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit

$$z^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^3 = 0.$$

Aufgabe II.2: **(13+12 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n^2+8n-9} - \sqrt{n^2-1}\right)^n x^n.$

b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Aufgabe II.3: **(20 Pkt.)**

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx.$$

Aufgabe II.4: **(10+10 Pkt.)**

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^{n(n-1)}.$$

b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert mit der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4 + e^{x(x-1)})}{x^2}.$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(8+8+8+8+8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

a) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ genau dann, wenn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, und ist $N \in \mathbb{N}$, so besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^{2k+1}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Umkehrfunktion.

c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende konvexe Funktion und ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige konvexe Funktion, so ist $f \circ g$ konvex.

d) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig, so ist auch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = (f(x))^2$ in x_0 unstetig.

e) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Nullfolge und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge, so ist $(a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.