Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Sjoerd Dirksen
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 10.08.2017

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik I

SS 2017

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage zwei Punkte und für eine richtige Begründung sechs Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(26 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

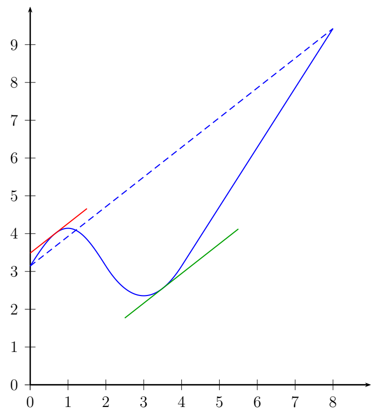
a) Begründen Sie, warum Maximum und Minimum von f auf $[-2, 4]$ existieren müssen.

b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen sowie Maxima und Minima von f auf $[-2, 4]$.

Aufgabe I.2: **(28 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 8] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \pi, & 0 \le x \le 2, \\ \frac{\pi}{4}(x-3)^2 + \frac{3\pi}{4}, & 2 < x \le 4, \\ \frac{\pi}{2}x - \pi, & 4 < x \le 8. \end{cases}$$



a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Differenzierbarkeit auf $(0, 8)$.

b) Begründen Sie, dass ein $x_0 \in (0, 8)$ existiert, so dass gilt

$$f(8) - f(0) = 8f'(x_0).$$

c) Bestimmen Sie alle $x_0 \in (0, 8)$ mit

$$f(8) - f(0) = 8f'(x_0).$$

Aufgabe I.3: **(26 Pkt.)**

Führen Sie zuerst die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{4x + 11}{x^2 + 3x - 4}$$

durch und dann beweisen Sie, dass die n-te Ableitung von f ist gegeben durch

$$f^{(n)}(x) = 3 \cdot (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(x+4)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(16+14 Pkt.)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int \sin(2x)\cos(3x)\,dx, \qquad \text{b)} \int_{-1}^{1} \frac{8x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Aufgabe II.2: **(15 Pkt.)**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}.$$

Aufgabe II.3: **(18 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{k^2+6k} - \sqrt{k^2+1}\right)^k}{k^2 \cdot 3^{2k}} x^k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe II.4: **(17 Pkt.)**

Bestimmen Sie alle $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$z^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{126} = 0.$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(8+8+8+8+8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare gerade Funktion, d.h. $f(-x) = f(x)$. Dann gilt

$$f'(-x) = -f'(x).$$

b) Sei f stetig auf $[a, +\infty)$ und differenzierbar auf $(a, +\infty)$ mit $f'(x) > k > 0$ für alle $x > a$, wobei k eine Konstante ist. Falls $f(a) < 0$ gilt, dann ist die Gleichung $f(x) = 0$ eine eindeutige Lösung auf dem Interval $\left(a, a - \dfrac{f(a)}{k}\right)$ eindeutig lösbar.

c) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Nullfolge und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge, so ist $(a_k \cdot b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

d) Seien $a_k, b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, so dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent sind. Dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \min\{a_k, b_k\}$.

e) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Dann besitzt M stets ein Minimum.