Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut
Dr. Harald Günzel

Aachen, den 21.02.2019

Klausur zur Mathematik I

WS 2019

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I Variante A

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \;\geq\; \frac{5}{6}.$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. Es gilt $\sum_{k=1+1}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq \frac{5}{6}$. Damit gilt die Aussage für $n = 1$. $\boxed{2}$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Aussage für eine natürliche Zahl n gilt, dass also für dieses n die Ungleichung $\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \geq \frac{5}{6}$ gilt. $\boxed{1}$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Induktionsvoraussetzung (also unter der Annahme, dass die Ungleichung für eine natürliche Zahl n gilt) die Aussage auch für $n + 1$ gilt.
Es gilt

$$\underbrace{\sum_{k=(n+1)+1}^{3(n+1)} \frac{1}{k}}_{\boxed{1}} = \sum_{k=n+2}^{3n+3} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}. \quad \boxed{2}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \geq \frac{5}{6}$ und folglich

$$\left(\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{5}{6} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}. \quad \boxed{1}$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Wir zeigen dazu, dass die linke Seite sogar echt größer als 0 ist: Allgemein gilt für positive reelle Zahlen $a < b$, dass $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. (Dies folgt z.B. mittels Division der Ungleichung $a < b$ durch die positive Zahl $a \cdot b$.) Folglich gilt: $\boxed{2}$

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} > 3 \cdot \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

Insgesamt folgt

$$\sum_{k=(n+1)+1}^{3(n+1)} \frac{1}{k} \;\geq\; \frac{5}{6},$$

die Aussage gilt also auch für $n + 1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage damit für alle natürlichen Zahlen n. $\boxed{1}$

Aufgabe I.2: (12 Pkt.)

Sei $b > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass die Funktion

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{b^2}{(x+1)^5} - \frac{b}{x+2} - \frac{1}{2}$$

eine Nullstelle $x_0 \geq 0$ besitzt.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Es gilt $h(0) = b^2 - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} > 0 \iff b(b - \frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$. Aus $b > 1$ folgt $b - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Deshalb $b(b - \frac{1}{2}) > b - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ und somit $h(0) > 0$. $\Big\}\ \boxed{4}$

Aus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b^2}{(x+1)^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x+2} = 0$$

folgt $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\frac{1}{2} < 0$. $\Big\}\ \boxed{4}$

Damit existiert eine reelle Zahl $c > 0$ mit $h(c) < 0$. $\}\ \boxed{1}$

Da $\overbrace{h \text{ stetig}}^{\boxed{1}}$ ist (als Komposition stetiger Funktionen) $\overbrace{\text{folgt mit dem Zwischenwertsatz}}^{\boxed{1}}$, dass ein $x_0 \in (0, c)$ existiert mit $h(x_0) = 0$.

$\boxed{1}$ für Ordnung/mathematische Korrektheit

Aufgabe I.3: **(3+5+6+4 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) + x \ .$$

a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf $[-10, 10]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f auf dem Intervall $(-10, 10)$.

c) Entscheiden Sie mit Methoden der Differentialrechnung, ob die in b) bestimmten kritischen Punkte lokale Extremalstellen sind und um welche Art von Extremalstellen es sich handelt (lokale Maximalstelle oder lokale Minimalstelle).

d) Bestimmen Sie nun alle globalen Extremalstellen und Extrema von f.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a)

Das Polynom $x^2 - x + 1$ besitzt auf dem Intervall $[-10, 10]$ keine Nullstellen. Somit die ist Funktion $\ln(x^2 - x + 1)$ als Komposition eines nullstellenfreien Polynoms mit dem natürlichen Logarithmus stetig auf dem Intervall $[-10, 10]$. Da die Vorschriften $g(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ und $h(x) = x$ jeweils stetige Funktionen darstellen, ist $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$ stetig. $\boxed{1}$

Da das Intervall $[-10, 10]$ beschränkt und abgeschlossen ist, $\boxed{1}$

impliziert der Satz von Weierstraß, dass f auf dem Intervall $[-10, 10]$ ein globales Maximum und eine globales Minimum annehmen muss. $\boxed{1}$

b) Um die kritischen Punkte im Intervall $(-10, 10)$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Ableitung von f im Intervall $(-10, 10)$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + 1 \ . \quad \boxed{2}$$

Um die kritischen Punkte zu bestimmen, müssen wir die Nullstellen von f' identifizieren. Es gilt,

$$\begin{aligned} & \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + 1 = 0 \quad \boxed{1} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x - 1 + x^2 - x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + 1)x = 0 \ . \end{aligned}$$

Somit sind $x_1 \overset{\boxed{1}}{=} 0$ und $x_2 \overset{\boxed{1}}{=} -1$ die kritischen Punkte im Intervall $(-10, 10)$.

c) Um die Art der Extremstellen zu bestimmen, berechnen wir zunächst die 2-te Ableitung der Funktion f. Diese Ableitung berechnet sich zu

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \quad \boxed{2}$$

Damit folgt, dass

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{-2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1}{(0^2 - 0 + 1)^2} = \frac{1}{1} = 1, \quad \boxed{1}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1}{((-1)^2 - (-1) + 1)^2} = -\frac{1}{3}. \quad \boxed{1}$$

Die Funktion besitzt somit ein lokales Minimum im Punkt $x_1 = 0$ $\boxed{1}$ und ein lokales Maximum im Punkt $x_2 = -1$. $\boxed{1}$

d) Die Funktionswerte für die lokalen Extremstellen sind $f(x_1) = \ln(0^2 - 0 + 1) + 0 = 0$ und

$$f(x_2) = \ln((-1)^2 + 1 + 1) - 1 = \ln(3) - 1\ .$$

Als weitere Kandidaten für Extrema im Intervall $[-10, 10]$ kommen lediglich die Randwerte der stetigen Funktion f infrage. Diese Randwerte berechnen sich zu

$$\begin{aligned} f(-10) &= \ln(100 + 10 + 1) - 10 = \ln(111) - 10 < 0 = f(0), &\quad \text{da } 111 < 128 = 2^7 < e^7 < e^{10} \\ f(10) &= \ln(100 - 10 + 1) = \ln(91) + 10 > \ln(3) - 1 = (-1), &\quad \text{da } 91 > 3 \text{ und } e^{11} > 1\ . \end{aligned}$$

Somit handelt es sich beim Randwert $f(-10)$ um ein globales Minimum (der Funktionswert liegt unterhalb des Funktionswert des lokalen Minimums und rechtsseitig von $f(-10)$ liegt ein lokales Maximum) und bei $f(10)$ handelt es sich um ein globales Maximum (der Funktionswert ist größer als der Funktionswert des lokalen Maximums und linksseitig liegt das lokale Minimum in $x = 0$).

$\boxed{2}$ Idee, die Randpunkte zu untersuchen

$\boxed{2}$ Vergleich der Funktionswerte der vier Punkte

Teil II

Aufgabe II.1: **(6+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung

$$|2x-6|+|3x-15|=5$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Ungleichung

$$|8+x|<|x-2|$$

gilt.

Ergebnis:	
a) $\{4, 5\frac{1}{5}\}$	b) $(-\infty,-3)$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Die einzige Nullstelle der (auf $\mathbb{R}$ definierten) Funktion $x \mapsto 2x-6$ ist $x=3$. Die einzige Nullstelle der (auf $\mathbb{R}$ definierten) Funktion $x \mapsto 3x-15$ ist $x=5$. Es gilt $\mathbb{R}=(-\infty,3) \cup [3,5) \cup [5,\infty)$. Wir untersuchen die Gleichung in jedem der drei Intervalle gesondert. $\boxed{2}$

Für $x \in (-\infty,3)$ gilt $2x-6<2\cdot 3-6=0$, also $|2x-6|=6-2x$, und $3x-15<3\cdot 3-15=-6<0$, also $|3x-15|=15-3x$. Für $x \in (-\infty,3)$ ist die Gleichung $|2x-6|+|3x-15|=5$ also äquivalent zu der Gleichung $6-2x+15-3x=5 \iff -5x=-16 \iff x=16/5$. Aber $16/5>3$, also gibt es keine Lösung im Intervall $(-\infty,3)$. $\boxed{1}$

Für $x \in [3,5)$ gilt $2x-6 \geq 2\cdot 3-6=0$, also $|2x-6|=2x-6$, und $3x-15<3\cdot 5-15=0$, also $|3x-15|=15-3x$. Für $x\in[3,5)$ ist die Gleichung $|2x-6|+|3x-15|=5$ also äquivalent zu der Gleichung $2x-6+15-3x=5 \iff -x=-4 \iff x=4$. Wegen $4\in[3,5)$ ist $x=4$ in der Tat eine Lösung und ist die einzige Lösung im Intervall $[3,5)$. $\boxed{1}$

Für $x\in[5,\infty)$ gilt $2x-6\geq 2\cdot 5-6=4>0$, also $|2x-6|=2x-6$, und $3x-15\geq 3\cdot 5-15=0$, also $|3x-15|=3x-15$. Für $x\in[5,\infty)$ ist die Gleichung $|2x-6|+|3x-15|=5$ also äquivalent zu der Gleichung $2x-6+3x-15=5 \iff 5x=26 \iff x=5\frac{1}{5}$. Wegen $5\frac{1}{5}\in[5,\infty)$ ist $x=5\frac{1}{5}$ in der Tat eine Lösung und ist die einzige Lösung im Intervall $[5,\infty)$. $\boxed{1}$

Die gesuchte Lösungsmenge ist also die Menge $\{4,5\frac{1}{5}\}$. $\boxed{1}$

b) Für $x\in\mathbb{R}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$|8+x|<|x-2| \overset{\boxed{2}}{\iff} (x+8)^2<(x-2)^2 \iff \overbrace{x^2+16x+64<x^2-4x+4 \iff 20x<-60 \iff x<-3}^{\boxed{1}}.$$

Die gesuchte Menge ist also die Menge $\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3\}=(-\infty,-3)$. $\boxed{1}$

Aufgabe II.2: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{-3-i}{\sqrt{2}+i\,2\sqrt{2}} \right)^{101} .$$

Ergebnis:
$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):
Wir schreiben $z = w^{101}$ für $w = \frac{-3-i}{\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$ und rechnen

$$\left.\begin{aligned} w = \frac{-3-i}{\sqrt{2}+i2\sqrt{2}} = \frac{(-3-i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i2\sqrt{2})(\sqrt{2}-i2\sqrt{2})} &= \frac{-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+i(-\sqrt{2}+6\sqrt{2})}{10} \\ &= \frac{-5\sqrt{2}+i(5\sqrt{2})}{10} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \boxed{3}$$

Da $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ können wir w in Polarkoordinaten schreiben:

$$w = -\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4}) = e^{i\frac{3\pi}{4}}. \qquad \boxed{2}$$

Damit folgt

$$z = w^{101} = (e^{i\frac{3\pi}{4}})^{101} = e^{i\frac{303\pi}{4}} = e^{i(\frac{320-17}{4})\pi} = e^{i80\pi}e^{-i\frac{17\pi}{4}} = e^{i80\pi}e^{-i4\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}. \qquad \boxed{3}$$

Da $e^{i80\pi} = e^{-i4\pi} = 1$ folgt $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Damit

$$\mathrm{Re}(z) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{Im}(z) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \boxed{2}$$

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie das maximale $r > 0$, sodass die untenstehende Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+7}{n^2+4}\right)^{n^3} x^n.$$

Ergebnis:
e^{-3}

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Wir setzen $a_n := \left(\frac{n^2+7}{n^2+4}\right)^{n^3} = \left(1 + \frac{3}{n^2+4}\right)^{n^3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und verwenden das Wurzelkriterium: $\boxed{2}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{3}{n^2+4}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{3}{n^2+4}\right)^{n^2+4} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{3}{n^2+4}\right)^{-4}}_{\to 1} \underset{n\to\infty}{\to} e^3 \quad \boxed{4}$$

da $\left(1 + \frac{3}{n^2+4}\right)^{n^2+4}$ eine Teilfolge von $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ ist und damit gegen e^3 konvergiert für $n \to \infty$ laut Vorlesung. Damit folgt, dass $\boxed{2}$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \underset{n\to\infty}{\to} |x| \cdot e^3$$

also konvergiert die Reihe gemäß des Wurzelkriteriums sobald $|x| < e^{-3}$ und divergiert sobald $|x| > e^{-3}$. $\boxed{2}$

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

Ergebnis:
$\frac{1}{2}$ $\boxed{2}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Es gilt,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)} && \Big\}\boxed{1}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\frac{1}{x}+\ln(x)-1}{\ln(x)+\frac{1}{x}(x-1)} && \Big\}\boxed{3} = \begin{cases}\boxed{1} & \text{„}\tfrac{0}{0}\text{“}\\ \boxed{2} & \text{Abl.}\end{cases}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)}{\ln(x)-\frac{1}{x}+1} && \Big\}\boxed{1}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} && \Big\}\boxed{3} = \begin{cases}\boxed{1} & \text{„}\tfrac{0}{0}\text{“}\\ \boxed{2} & \text{Abl.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion mit $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in (-1, 1)$. Dann ist f im Punkt $x_0 := 0$ stetig.

b) Für alle Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt Folgendes: Wenn weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht konvergent.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ferner sei bekannt, dass $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$ gilt. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

d) Für alle Aussagen A und B folgt aus $A \Rightarrow B$ notwendigerweise $\neg A \Rightarrow \neg B$.

e) Es seien $a_0, a_1 \geq 0$. Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x) \cdot (x^2 + a_1 x + a_0)$. Dann ist f auf $(0, \infty)$ monoton wachsend.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	W	Laut Voraussetzung gilt $f(0) = 0$. Also folgt für alle $x \in (-1, 1)$, dass $$\|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| \overset{\text{Vor.}}{\leq} x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0.$$ Dies gegründet die Stetigkeit von f in 0.
b)	F	Für $a_n := b_n := (-1)^n$ konvergieren weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aber wegen $a_n \cdot b_n = 1$ konvergiert $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c)	W	Laut Voraussetzung gilt $f(-1) < f(0)$ und $f(1) < f(0)$, also liegt das Maximum der Einschränkung $f\|_{[-1,1]}$ in keinem der Randpunkte. Das Maximum der Einschränkung $f\|_{[-1,1]}$ muss aber nach dem Satz von Weierstraß über Maxima/Minima existieren, da f stetig und das Intervall $[-1, 1]$, auf dem wir f betrachten, beschränkt ist. Sei also $x \in (-1, 1)$ eine Maximalstelle von $f\|_{[-1,1]}$. Auf Grund der Differenzierbarkeit von f folgt daraus $f'(x) = 0$.
d)	F	Für die (mögliche) Belegung $A : F$, $B : W$ mit Wahrheitswerten ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, aber wegen $\neg A : W$ und $\neg B : F$ ist die Implikation $\neg A \Rightarrow \neg B$ falsch. Somit ist $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ falsch. Man muss die kritische Belegung mit Wahrheitswerten **genau angeben** und **keine einzige falsche** als relevant angeben. --- Wir betrachten Aussagen A und B, die über die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gemacht werden können. Es sei A die Aussage „$n = 2$“ und B die Aussage „n ist gerade“. Zweifellos gilt $A \Rightarrow B$, denn 2 ist ja gerade. Andererseits gilt nicht $\neg A \Rightarrow \neg B$, denn für $n = 4$ ist $\neg A$ wahr, jedoch $\neg B$ falsch, es gilt also für $n = 4$ nicht $\neg A \Rightarrow \neg B$. Somit ist $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ falsch.
e)	F	Es seien $a_1 := a_0 := 0$. Dann betrachten wir die Funktion $f(x) = \ln(x) \cdot x^2$. Wir haben also $$f'(x) = \ln(x) \cdot 2x + \frac{x^2}{x} = \ln(x) \cdot 2x + x = x(2\ln(x) + 1).$$ Für $x \in (0, e^{-1})$ gilt wegen der Monotonie von $\ln$, dass $\ln(x) < -1$, also $2\ln(x) + 1 < -2 + 1 = -1$. Wegen $x > 0$ gilt somit für alle $x \in (0, e^{-1})$, dass $f'(x) < 0$ gilt. Auf $(0, e^{-1})$ ist f also laut Vorlesung monoton fallend. Dies bedeutet, dass f nicht auf (dem gesamten Intervall) $(0, \infty)$ monoton wachsend ist.