Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut
Dr. Harald Günzel

Aachen, den 21.02.2019

Klausur zur Mathematik I

WS 2019

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \;\geq\; \frac{5}{6}.$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(12 Pkt.)**

Sei $b > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass die Funktion

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{b^2}{(x+1)^5} - \frac{b}{x+2} - \frac{1}{2}$$

eine Nullstelle $x_0 \geq 0$ besitzt.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(3+5+6+4 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) + x \ .$$

a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf $[-10, 10]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f auf dem Intervall $(-10, 10)$.

c) Entscheiden Sie mit Methoden der Differentialrechnung, ob die in b) bestimmten kritischen Punkte lokale Extremalstellen sind und um welche Art von Extremalstellen es sich handelt (lokale Maximalstelle oder lokale Minimalstelle).

d) Bestimmen Sie nun alle globalen Extremalstellen und Extrema von f.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(6+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung

$$|2x - 6| + |3x - 15| = 5$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Ungleichung

$$|8 + x| < |x - 2|$$

gilt.

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{-3 - i}{\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}} \right)^{101} .$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie das maximale $r > 0$, sodass die untenstehende Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 7}{n^2 + 4} \right)^{n^3} x^n.$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) .$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion mit $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in (-1, 1)$. Dann ist f im Punkt $x_0 := 0$ stetig.

b) Für alle Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt Folgendes: Wenn weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht konvergent.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ferner sei bekannt, dass $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$ gilt. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

d) Für alle Aussagen A und B folgt aus $A \Rightarrow B$ notwendigerweise $\neg A \Rightarrow \neg B$.

e) Es seien $a_0, a_1 \geq 0$. Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x) \cdot (x^2 + a_1 x + a_0)$. Dann ist f auf $(0, \infty)$ monoton wachsend.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1
Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	