Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 28.08.2019

Klausur zur Mathematik I

Sommersemester 2019

Variante B

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(12 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \;>\; \sqrt{2n+2} - \frac{13}{10}.$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(13 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \geq 0$ existiert, so dass gilt:

$$(\sin(x_0))^2 = \exp(5 - x_0).$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(15 Pkt.)**

Es sei die Funktion $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) = e^x(x^2 - 3) \ .$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion f und geben Sie jeweils an, um welche Art von Extremstelle es sich handelt (Minimalstelle oder Maximalstelle, lokal oder global). Geben Sie für jede Extremstelle auch den zugehörigen Funktionswert an.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(12 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung

$$|2x+4|+|x-3|=|x-1|+7$$

gilt.

Ergebnis:

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: (10 Pkt.)

Bestimmen Sie das Intervall aller reellen Zahlen x, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot 6^k} \cdot (x-6)^k$$

absolut konvergiert.

Ergebnis:

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: (10 Pkt.)

Bestimmen Sie die Menge aller $n \in \mathbb{Z}$, für welche die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n = -i$$

gilt.

Ergebnis:

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(8 Pkt.)**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)$$

Ergebnis:

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch die Vorschrift $f(x) = e^{-|x|}$, ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ist stetig fortsetzbar im Punkt $x = 0$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Gleichung:

$$\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x).$$

d) Wenn eine konvergente Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele positive und unendlich viele negative Folgenglieder besitzt, dann konvergiert sie gegen 0.

e) Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = -\ln(1 + x)$, ist streng konvex.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	