Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 28.08.2019

Klausur zur Mathematik I

Sommersemester 2019

Variante B

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(12 Pkt.)**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \;>\; \sqrt{2n+2} - \frac{13}{10}.$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2 \cdot 1 + 2} - \frac{13}{10} = 2 - \frac{13}{10} = \frac{7}{10}$. Zu zeigen ist also $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{7}{10} \iff \frac{1}{2} > \frac{49}{100} \iff \frac{50}{100} > \frac{49}{100}$, was offenbar wahr ist. Damit gilt die Aussage für $n = 1$. $\boxed{2}$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Aussage für eine natürliche Zahl n gilt, dass also für dieses n die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \;>\; \sqrt{2n+2} - \frac{13}{10}$ gilt. $\boxed{1}$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Induktionsvoraussetzung (also unter der Annahme, dass die Ungleichung für eine natürliche Zahl n gilt) die Aussage auch für $n+1$ gilt, dass also unter der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2k}} > \sqrt{2(n+1)+2} - \frac{13}{10}.$$

$\boxed{1}$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

$\boxed{1}$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > \sqrt{2n+2} - \frac{13}{10} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

$\boxed{2}$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\sqrt{2n+2} - \frac{13}{10} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > \sqrt{2(n+1)+2} - \frac{13}{10}.$$

$\boxed{1}$

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{2n+2}-\frac{13}{10}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}>\sqrt{2(n+1)+2}-\frac{13}{10}\\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{2n+2}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}>\sqrt{2n+4}
\end{aligned}\right\}\ \boxed{1}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ &\frac{2n+3}{\sqrt{2n+2}}>\sqrt{2n+4}\\
\Longleftrightarrow\ &2n+3>\sqrt{(2n+2)(2n+4)}\\
\Longleftrightarrow\ &(2n+3)^2>(2n+2)(2n+4)\quad \text{(da beide Seiten der vorigen Zeile positiv sind)}\\
\Longleftrightarrow\ &(2n+3)^2>(2n+3)^2-1\quad \text{(dritte binomische Formel).}
\end{aligned}$$

Die Ungleichung in der letzten Zeile ist offenbar eine wahre Aussage. Also gilt in der Tat $\sqrt{2n+2}-\frac{13}{10}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}>\sqrt{2(n+1)+2}-\frac{13}{10}$ und somit auch

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2k}}>\sqrt{2(n+1)+2}-\frac{13}{10}.$$

$\boxed{2}$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage damit für alle natürlichen Zahlen $n.\}\ \boxed{1}$

Aufgabe I.2: **(13 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \geq 0$ existiert, so dass gilt:

$$(\sin(x_0))^2 = \exp(5 - x_0).$$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden): Wir benutzen den $\overbrace{\text{Zwischenwertsatz}}^{\boxed{1}}$ um zu zeigen, dass die Funktion

$$f(x) = (\sin(x))^2 - \exp(5 - x) \qquad \Big\}\boxed{2}$$

eine Nullstelle $x_0 \geq 0$ hat.
Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x_0) = (\sin(0))^2 - \exp(5) = 0 - \exp(5) \overset{\boxed{3}}{<} 0.$$

Außerdem gilt für $x_0 = 2\pi + \frac{\pi}{2}$:

$$f(x_0) = (\sin(\frac{\pi}{2}))^2 - \exp(5 - (2\pi + \frac{\pi}{2})) = 1 - \exp(5 - (2\pi + \frac{\pi}{2})).$$

Da $2\pi > 5$ gilt somit $5 - (2\pi + \frac{\pi}{2}) < 0$ und daher $\exp(5 - (2\pi + \frac{\pi}{2})) < 1$. Somit gilt $f(x_0) > 0$ in diesem Fall. $\boxed{3}$

Da f als $\overbrace{\text{Komposition}}^{\boxed{1}}$ aus stetigen Funktionen wiederum $\overbrace{\text{stetig}}^{\boxed{1}}$ ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $\underbrace{x_0 \in (0, 2\pi + \frac{\pi}{2})}_{\boxed{1}}$ existiert, so dass $\underbrace{f(x_0) = 0}_{\boxed{1}}$, woraus die Aussage folgt.

Aufgabe I.3: **(15 Pkt.)**

Es sei die Funktion $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) = e^x(x^2 - 3) \ .$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion f und geben Sie jeweils an, um welche Art von Extremstelle es sich handelt (Minimalstelle oder Maximalstelle, lokal oder global). Geben Sie für jede Extremstelle auch den zugehörigen Funktionswert an.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden): Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 3). \qquad \boxed{2}$$

Da $\overbrace{e^x \neq 0}^{\boxed{1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, reicht es die Nullstellen von $x^2 + 2x - 3$ zu bestimmen.

$$\left.\begin{aligned} & x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 1, \quad x_2 = -3 \end{aligned}\right\} \boxed{2}$$

Damit sind die Kandidaten für Extrem der Funktion f gegeben durch $-4, -3, 1, 4$. Wir bestimmen zunächst die Eigenschaften der Extrema in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Dazu berechnen wir

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 1) \ . \qquad \boxed{2}$$

Somit folgt,

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= e(1 + 4 - 1) = 4e > 0 && \text{lokaler TP} && \boxed{2} \\ f''(x_2) &= e^{-3}(9 - 12 - 1) = -4e^{-3} < 0 && \text{lokaler HP.} && \boxed{2} \end{aligned}$$

Die Funktionswerte an den kritischen Stellen und den Randstellen sind,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= e(1 - 3) = -2e \\ f(x_2) &= e^{-3}(9 - 3) = 6e^{-3} \\ f(4) &= e^4(16 - 3) = 13e^4 \\ f(-4) &= 13e^{-4} \end{aligned}$$

Wegen $13 \leq 6 \cdot \frac{27}{10} \leq 6e$ erhalten wir

$$f(x_1) < f(-4) < f(x_2) < f(4)$$

Damit ist x_1 die globale Minimalstelle, -4 eine lokale Minimalstelle, x_2 eine lokale Maximalstelle und 4 die globale Maximalstelle. $\boxed{4}$

Teil II

Aufgabe II.1: **(12 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung

$$|2x+4| + |x-3| = |x-1| + 7$$

gilt.

Ergebnis:
$\{-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\}$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):
a) Die einzige Nullstelle der (auf $\mathbb{R}$ definierten) Funktion $x \mapsto 2x+4$ ist $x=-2$. Die einzige Nullstelle der (auf $\mathbb{R}$ definierten) Funktion $x \mapsto x-3$ ist $x=3$. Die einzige Nullstelle der (auf $\mathbb{R}$ definierten) Funktion $x \mapsto x-1$ ist $x=1$.

Es gilt $\mathbb{R} = (-\infty,-2) \cup [-2,1) \cup [1,3) \cup [3,\infty)$. $\}\boxed{2}$

Wir untersuchen die Gleichung in jedem der vier Intervalle gesondert.

Für $x \in (-\infty,-2)$ gilt $2x+4<0$, also $|2x+4| = -(2x+4)$, und $x-3<0$, also $|x-3| = -(x-3)$ und $x-1<0$, also $|x-1| = -(x-1)$.
Für $x \in (-\infty,-2)$ ist die Gleichung $|2x+4|+|x-3| = |x-1|+7$ also äquivalent zu der Gleichung $-(2x+4)-(x-3) = -(x-1)+7 \iff 3x+1 = x-8 \iff x = -9/2$. Wegen $-9/2 \in (-\infty,-2)$ ist $x=-9/2$ in der Tat eine Lösung der Gleichung. $\boxed{2}$

Für $x \in [-2,1)$ gilt $2x+4 \geq 0$, also $|2x+4| = 2x+4$, und $x-3<0$, also $|x-3| = -(x-3)$ und $x-1<0$, also $|x-1| = -(x-1)$.
Für $x \in [-2,1)$ ist die Gleichung $|2x+4|+|x-3| = |x-1|+7$ also äquivalent zu der Gleichung $2x+4-(x-3) = -(x-1)+7 \iff x+7 = -x+8 \iff x = 1/2$. Wegen $1/2 \in [-2,1)$ ist $x=1/2$ in der Tat eine Lösung der Gleichung. $\boxed{2}$

Für $x \in [1,3)$ gilt $2x+4>0$, also $|2x+4| = 2x+4$, und $x-3<0$, also $|x-3| = -(x-3)$ und $x-1 \geq 0$, also $|x-1| = x-1$.
Für $x \in [1,3)$ ist die Gleichung $|2x+4|+|x-3| = |x-1|+7$ also äquivalent zu der Gleichung $2x+4-(x-3) = x-1+7 \iff x+7 = x+6$, was offenbar nicht lösbar ist. Also gibt es keine Lösung im Intervall $[1,3)$. $\boxed{2}$

Für $x \in [3,\infty)$ gilt $2x+4>0$, also $|2x+4| = 2x+4$, und $x-3 \geq 0$, also $|x-3| = x-3$ und $x-1>0$, also $|x-1| = x-1$.
Für $x \in [3,\infty)$ ist die Gleichung $|2x+4|+|x-3| = |x-1|+7$ also äquivalent zu der Gleichung $2x+4+x-3 = x-1+7 \iff 3x+1 = x+6 \iff x = 5/2$. Aber $5/2 \notin [3,\infty)$, also gibt es keine Lösung im Intervall $[3,\infty)$. $\boxed{2}$

Die gesuchte Lösungsmenge ist also die Menge $\{-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\}$. $\}\boxed{2}$

Aufgabe II.2: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie das Intervall aller reellen Zahlen x, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot 6^k} \cdot (x-6)^k$$

absolut konvergiert.

Ergebnis:
[0,12]

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Wir verwenden das Quotientenkriterium. $\}\boxed{1}$

Der Konvergenzradius beträgt $\lim\limits_{k\to\infty} = \frac{\frac{1}{k^2 6^k}}{\frac{1}{(k+1)^2 6^{k+1}}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2 6^{k+1}}{k^2 6^k} \overset{\boxed{3}}{=} 6.$

Folglich konvergiert die Reihe absolut für $x-6 \in (-6,6) \iff x \in (0,12)$, und sie konvergiert nicht für $x \in \mathbb{R} \setminus [0,12]$. $\boxed{2}$

Für $x \in \{0,12\}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{k^2 \cdot 6^k} \cdot (x-6)^k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, was eine konvergente Reihe ist. (Eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_1 = 1$ und $a_k = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ für $k \geq 2$. Denn für $N \geq 1$ ist $\sum_{k=1}^{N} a_k = 1 + 1 - \frac{1}{N} = 2 - \frac{1}{N}$, also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$.) Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot 6^k} \cdot (x-6)^k$ genau dann absolut, wenn $x \in [0,12]$. $\boxed{4}$

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Menge aller $n \in \mathbb{Z}$, für welche die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n = -i$$

gilt.

Ergebnis:
$n \in \{9 + 12k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Wir können die komplexe Zahl $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ in Polarkoordinaten schreiben als $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$. $\Big\}\boxed{3}$

Da $\underbrace{|z| = 1}_{\boxed{1}}$ ist somit die Gleichung äquivalent zu

$$e^{in\frac{\pi}{6}} = -i.$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\cos(n\frac{\pi}{6}) = 0$ und $\sin(n\frac{\pi}{6}) = -1$. $\}\boxed{3}$

Dies wiederum gilt genau dann, wenn

$$n\frac{\pi}{6} \in \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \Bigg\}\boxed{2}$$

was wiederum genau dann gilt, wenn

$$n \in \{9 + 12k \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad \Big\}\boxed{1}$$

Aufgabe II.4: **(8 Pkt.)**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)$$

Ergebnis:
$-\frac{1}{2}$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):
Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}-\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\boxed{2}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

Wegen $\lim_{x\to 0} e^x-x-1=0$ und $\lim_{x\to 0} x^2=0$ $\overbrace{\text{können wir l'Hospital anwenden}}^{\boxed{1}}$. Damit folgt

$$\left.\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\quad\right\}\boxed{1}$$

Wiederum gilt $\lim_{x\to 0} e^x-1=0$ und $\lim_{x\to 0} 2x=0$. $\overbrace{\text{Also nach l'Hospital}}^{\boxed{1}}$

$$\left.\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\quad\right\}\boxed{1}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\left.\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\quad\right\}\boxed{2}$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch die Vorschrift $f(x) = e^{-|x|}$, ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ist stetig fortsetzbar im Punkt $x = 0$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Gleichung:

$$\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x).$$

d) Wenn eine konvergente Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele positive und unendlich viele negative Folgenglieder besitzt, dann konvergiert sie gegen 0.

e) Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = -\ln(1 + x)$, ist streng konvex.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

a)	F	Es gilt mit L'Hospital $\lim_{h\to 0, h>0}(e^{-\lvert h\rvert}-1)/h = \lim_{h\to 0,h>0}(e^{-h}-1)/h = -1$ und $\lim_{h\to 0,h<0}(e^{-\lvert h\rvert}-1)/h = \lim_{h\to 0,h<0}(e^{h}-1)/h = 1$ Damit kann f im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar sein.
b)	F	Es gilt $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ und somit, da der $\ln$ stetig auf $(0,\infty)$ ist und da $\lim_{y\to\infty}\ln(y) = \infty$ gilt $\lim_{x\to 0}\ln(\frac{1}{x^2}) = \infty$. Daher ist die Funktion nicht stetig fortsetzbar im Punkt $x = 0$.
c)	F	Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gilt $\sin(\alpha) \neq 0$ und $\cos(\alpha) \neq 0$ und somit $4\sin(\alpha)\cos(\alpha) \neq 0$. Andererseits gilt $\sin(4\alpha) = \sin(\pi) = 0$.
d)	W	Angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Wir können o.B.d.A annehmen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ gilt. Es sei $\varepsilon = a/4$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $\lvert a_n - a\rvert \leq a/4$ erfüllt ist. Dies impliziert $a_n \geq a - a/4 = \frac{3}{4}a > 0$. Damit kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht unendlich viele negative Folgenglieder haben.
e)	W	Die Funktion f ist auf dem offenen Intervall $(0,\infty)$ 2-mal stetig differenzierbar und es gilt $f''(x) = 1/(1+x)^2$. Wegen $(1+x)^2 > 0$ für $x > 0$ folgt, dass für alle $x \in (0,\infty)$, $f''(x) > 0$ gilt. Damit ist f streng konvex auf $(0,\infty)$