Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 05.08.2013

Klausur zur Höheren Mathematik II

SoSe 2013

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1-III.3) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(6+4+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$ auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^{2n} n!} x^n$.

Aufgabe I.2: **(3+4+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den maximalen Stetigkeitsbereich der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } \; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \; x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} x\right), & \text{falls } \; x \leq 2 \\ \dfrac{1}{3} x^3 - 2x + \dfrac{4}{3}, & \text{falls } \; x > 2 \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie den maximalen Stetigkeitsbereich der Funktion g.

ii) Bestimmen Sie den maximalen Bereich, in dem die Funktion g differenzierbar ist.

Aufgabe I.3: **(2+11 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x), & \text{falls } \; -\pi \leq x < 0, \\ x(\pi - x), & \text{falls } \; 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_k und b_k für $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ ist.

Teil II

Aufgabe II.1: **(4+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema “Grenzwerte.”

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+2x+1})$.

Aufgabe II.2: **(2+4+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema “Integralrechnung“.

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\dfrac{\cos(x)\sin(x)}{1-\cos^2(x)}$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k(n-k)\right)$.

c) Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoiden $E:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$. Fassen Sie dabei E als Rotationskörper auf.

Aufgabe II.3: **(4+2 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema ”Taylorreihenentwicklung.“ Dabei sei jeweils $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\cos(\sin(x))$ gegeben.

a) Bestimmen Sie $T_{2,\pi}(x)$ von f, also das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle π, von f.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_{1,0}(x)$ von f in der Form von Lagrange.

Aufgabe II.4: **(4+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema ”mehrdimensionalen Differentiation.“

a) Es sei $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\sin(2x)\cdot\ln(x^2y)$. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f an der Stelle $(x,y)=(\pi,\frac{e}{\pi^2})$.

b) Es sei $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $g(x,y)=x^2\cdot e^{3x+2y}$. Bestimmen Sie die Hessematrix der Funktion g.

Teil III

Aufgabe III.1: **(3+3+3+3 Pkt.)**

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{\sin(x)+y^3} \cdot \arctan(x)$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, (A2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \cdot f(x,y)$.

b) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h = g \circ f$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$, $g(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ e^u \end{pmatrix}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

(A1) $h'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (A3) $D_1 g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix}$.

(A2) $h'(0) = h'(\pi)$. (A4) $g'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ e^u & 0 \end{pmatrix}$.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^1 f(e^x)\,dx$, (A2) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

d) Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\mathsf{arsinh}(x)} \mathsf{cosh}(\mathsf{sinh}(t))\,dt$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(A1) $F'(x) = \mathsf{cosh}(\mathsf{sinh}(x)) \cdot \mathsf{cosh}(x)$, (A3) $F'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{4+4x^2}}$.

(A2) $F'(x) = \dfrac{\mathsf{cosh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$, (A4) $F'(x) = \mathsf{cosh}(\mathsf{sinh}(x)) \cdot \mathsf{arsinh}(x)$

Aufgabe III.2: **(3+3+3 Pkt.)**

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es gilt: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = -\infty$.

(A2) f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen kritischen Punkt.

(A3) f besitzt an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ jeweils ein globales Maximum.

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{e^x}\,dx$. gegeben.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Für $\alpha < 1$ existiert das uneigentliche Integral.

(A2) Für $\alpha = 1$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

(A3) Für $\alpha = -1$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ ist nachweisbar mit

(A1) dem Majorantenkriterium.
(A2) dem Leibnizkriterium.
(A3) dem Quotientenkriterium.

Aufgabe III.3: **(3+3+3 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle stetigen Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) Falls $0 \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$ existiert, so existiert auch $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

(A2) Falls g und h nur positive Werte annehmen und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) + h(x)\,dx$ existiert, so existieren auch $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Jede auf $[a, b]$ integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch stetig auf $[a, b]$.
(A2) Es gibt eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Punkt $x = 0$ eine Polstelle besitzt.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, so besitzt f mindestens eine Nullstelle.
(A2) Falls f auf $I = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ ist, so ist f auf $\mathbb{R}$ konstant.