Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 18.07.2013

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik II

SoSe 2013

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1-III.3) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(12 Pkt.)**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_{2,0}(x)$ sowie das Restglied $R_{2,0}(x)$ in Lagrange-Form an der Stelle 0 der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

und zeigen Sie

$$|R_{2,0}(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f'''(x)$ in der Form $f'''(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$ geschrieben werden kann.

Aufgabe I.2: **(6+6 Pkt.)**

Berechnen Sie die beiden folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{1}{2 + \cos(x)} dx \qquad \text{b)} \int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx, \quad x \neq 2.$$

Aufgabe I.3: **(6+8 Pkt.)**

Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt gegeben:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^2 + 2y} \\ \sin(x + y^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ x - y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x, y) := (f \circ g)(x, y)$ sowie deren Jacobimatrix $h'(x, y)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobimatrix $(f \circ g)'(x, y)$. Beachten Sie, dass andere Lösungsmethoden in diesem Aufgabenteil 0 Punkte bedeuten!

Teil II

Aufgabe II.1: **(2+4+2 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema "Reihen."

a) Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{4} a_n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert oder divergiert.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} x^n$.

Aufgabe II.2: **(2+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema "Grenzwerte."

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arctan(2x^2)}{\sin(4x^2)}$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2(\sqrt{x})}{e^x - 1}$.

Aufgabe II.3: **(4+2+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema "Stetigkeit und Differenzierbarkeit."

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}, & \text{falls } 1 < x < 2 \text{ oder } x > 2; \\ 4, & \text{falls } x = 2; \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Entscheiden Sie, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Funktion f stetig ist.

b) Entscheiden Sie, ob f aus Aufgabenteil $a)$ im Punkt $x = 1$ stetig ergänzbar ist. Geben Sie gegebenenfalls den zu ergänzenden Wert an.

c) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} e^{3x} + 1, & \text{falls } x > 0; \\ 2, & \text{falls } x = 0; \\ 2\cos(x^2), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie g auf Differenzierbarkeit im Ursprung und bestimmen Sie gegebenenfalls $g'(0)$.

Aufgabe II.4: **(4+4 Pkt.)**

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zum Thema "Kurven".

a) Gegeben sei die Kurve γ durch die Parametrisierung $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{8}}{3}t^3 \\ \frac{1}{4}t^4 - t^2 \end{pmatrix}$ mit $T > 0$. Bestimmen Sie die Länge der Kurve γ.

b) Gegeben sei die Kurve γ durch die Parametrisierung $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + 6\sin(t)\cos(t) \\ 3\cos(2t) - 2 \end{pmatrix}$ mit $T > 0$. Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve in Abhängigkeit von t.

Teil III

Aufgabe III.1: **(3+3+3+3 Pkt.)**

a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1} + \ln(z^2+1)$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(A1) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

(A2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,0)$.

(A3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = 0$.

(A4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + e^{y^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ 2xye^{y^2} \end{pmatrix}$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

(A1) Die Jacobimatrix $f'(x,y)$ ist symmetrisch.

(A2) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) = e$.

(A3) $D_2 f(x,y) = 2ye^{y^2}$.

(A4) $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) $\displaystyle\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)$.

(A2) $\displaystyle\int f(x)\cos(x)\, dx = f(x)\sin(x) - \int f'(x)\cos(x)\, dx$.

(A3) $\displaystyle\int f(2x)\, dx = 2\int f(x)\, dx$.

d) Es sei $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert als $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln(1+x)}} e^{-x^2}\, dx$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle $x \in (0,\infty)$ gilt:

(A1) $F'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(A2) $F'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}}$.

(A3) $F'(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{\ln(1+x)}}$.

Aufgabe III.2: **(3+3+3 Pkt.)**

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x$.
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) f besitzt an der Stelle $x = 1$ ein lokales Minimum.
(A2) f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen kritischen Punkt.
(A3) f besitzt an der Stelle $x = -1$ einen kritischen Punkt.
(A4) f besitzt an der Stelle $x = -1$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

b) Wir betrachten für $\alpha > 0$ das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)+2}{(x^2+1)^\alpha}\,dx$$

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Für $\alpha > 2$ existiert das uneigentliche Integral.
(A2) Für $\alpha = 1$ existiert das uneigentliche Integral.
(A3) Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k^2+2k+1)(k+2)}$ ist nachweisbar mit:

(A1) dem Majorantenkriterium.
(A2) dem Minorantenkriterium.
(A3) dem Wurzelkriterium.
(A4) dem Quotientenkriterium.

Aufgabe III.3: **(3+3+3 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle Folgen positiver Zahlen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt:

(A1) Falls $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(A2) Falls $b_k \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Jede auf (a,b) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[a,b]$.
(A2) Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) Falls $f(a) > f(b)$ ist, so existiert ein Punkt $x \in (a,b)$ mit der Eigenschaft, dass $2f(x) = f(a) + f(b)$ ist.
(A2) Falls f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit stetiger Ableitung f' und weiter $f(0) = 0$, $f(1) > 0$ und $f'(1) < 0$ ist, so gibt es ein $x \in (0,1)$ so dass $f'(x) = 0$ ist.