Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 22.02.2014

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik II

Wintersemester 2013/2014

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die dafür vorgesehenen Seiten des Antwortbogens. Wenn Sie mehr Papier benötigen, melden Sie sich bitte. Für Notizen nutzen Sie bitte eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(8 Pkt.)**

Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion, gegeben durch $f(x) := \sinh(\ln(x))$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle $x_0 = 1$. Zeigen Sie ausserdem mit Hilfe des Restglieds in Lagrange-Form, dass für alle $x \geq 1$ die folgenden Ungleichung gilt:

$$\left|\sinh(\ln(x)) - x + 1 + \frac{(x-1)^2}{2}\right| \leq \frac{(x-1)^3}{2}$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Aufgabe I.2: **(8+8 Pkt.)**

Lösen Sie die folgenden unbestimmten/uneigentlichen Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-9}{(x-1)^2(x+1)}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)\,e^{-2x}\,dx.$

Aufgabe I.3: **(8+8 Pkt.)**

a) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$ der folgenden Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ existiert:

$$f(x) = f(x_1,x_2) := \frac{|x_1| - |x_2|}{|x_1 - x_2| + |x_1 + x_2|}.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\left(e^x - \dfrac{1}{x}(e^x - 1)\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(4+4+4 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n + \cos(n\pi)}{4^n}$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$ auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n+1} x^n$.

Aufgabe II.2: **(4+4+4 Pkt.)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right),$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2+6x-9}\right),$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} (k^2+n^2)(k^2-n^2).$

Aufgabe II.3: **(2+2 Pkt.)**

a) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, gegeben durch $g(x,y) := x^2 y + \cos(3x)$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von g an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion, gegeben durch

$$f(x,y,z) := \arctan(x+y) \cdot z.$$

Bestimmen Sie den Gradienten von f an der Stelle $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Aufgabe II.4: **(5+5+2 Pkt.)**

a) Für $T > 0$ sei die parametrisierte Kurve $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$, mit $\gamma(t) = (\frac{4\sqrt{6}}{5} \cdot t^{5/2}, \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2)^\top$ gegeben. Berechnen Sie die Länge von γ.

b) Es sei die parametrisierte Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mit $\gamma(t) = (2 + 2\cosh(3t), -2\sinh(3t) - 3)^\top$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Krümmung von γ an der Stelle $\gamma(0)$.

(ii) Für welche Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ hat γ vertikale Tangenten?

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Es sei das Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$ gegeben.
Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) $p'(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 0, 1\}$ ist.
(A2) Für $x = -1$ nimmt das Polynom p das globale Maximum auf $\mathbb{R}$ an und für $x = 0$ liegt ein lokales Minimum vor.
(A3) Die zweite Ableitung von p im Punkt 0 ist größer als Null.

b) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, dann ist $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.
(A2) Unter der Voraussetzung von Aussage (A1) existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.
(A3) Falls für ein $x^\star \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x^\star) \geq f(x)$ ist, so ist $f'(x^\star) = 0$ und $f''(x^\star) < 0$.

c) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.
Für alle auf dem Interval $[0,1]$ Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

(A1) f ist auf dem Interval $[0,1]$ stetig.
(A2) Die Funktion $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, mit $F(x) = \int_0^x f(\tau)\,dt$, ist auf dem Interval $[0,1]$ stetig.
(A3) Die Funktion F aus Aussage (A2) ist auf dem Interval $(0,1)$ differenzierbar.

d) Beurteilen Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\lim_{k\to\infty} \|v_k\| = a$ ist, mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt stets, dass auch die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.
(A2) Es seien $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei divergente Folgen von Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt stets, dass auch die Folge $(u_k + w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent ist.
(A3) Falls $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig auf $A \subset \mathbb{R}^n$ und A abgeschlossen ist, dann existiert ein globales Minimum der Funktion f auf der Menge A.