Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 27.02.2016

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik II

WS 2015/16

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10+3 Pkt.)**

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -(a+5)x_1 + (a^2-4a+4)x_2 + (a-1)x_3 &= 1 \\ -(a^2+3a-10)x_1 - (a^2-4a+4)x_2 + 6x_3 &= a-2 \\ -(a+5)x_1 + (a^2-4a+4)x_2 + (a+5)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

keine, genau eine bzw. mehr als eine Lösung?

b) Berechnen Sie für $a = -3$ alle Lösungen.

Aufgabe I.2: **(5+4+8 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die folgende Darstellungsmatrix hat:

$$_{E_3}M(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die Vektoren $a_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $a_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ und $a_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Bestimmen Sie $f(a_1 - a_2)$ bezüglich der Standardbasis E_3.

c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $_AM(f)_{E_3}$ von f bezüglich E_3 und $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Aufgabe I.3: **(11 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Normalform und den Typ der folgenden Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 = 0 \right\}.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowohl $\max\limits_{\|x\|_2=1} x^TAx$ und einen zugehörigen Maximierer $x^+ \in \mathbb{R}^3$ als auch $\min\limits_{\|x\|_2=1} x^TAx$ und einen zugehörigen Minimierer $x^- \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe II.2: **(3+5 Pkt.)**

Gegeben seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\|_2 = 2$, $\|b\|_2 = 1$ und $\measuredangle(a,b) = \frac{\pi}{3}$. Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

a) b und $a - b$,

b) $a + b$ und $a - b$.

Aufgabe II.3: **(5+5 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von L.

Aufgabe II.4: **(4+2+5 Pkt.)**

Seien

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}.$$

a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von x auf U.

b) Berechnen Sie den minimalen Abstand von x zu U.

c) Ergänzen Sie $\{u_1, u_2\}$ zu einer Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

Seien $n, r \in \mathbb{N}$.

1) Seien die Vektoren a_1, a_2, ..., a_n linear unabhängig und a_1, a_2, ..., a_n, x linear abhängig. Dann existiert eine eindeutige Darstellung von x als Linearkombination von a_1, a_2, ..., a_n.

2) Sei $\{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$. Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert als

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i h_i^T, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, r\},$$

so sind die λ_i Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren h_i.

3) Seien v_1, v_2, v_3 beliebige linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann sind stets auch Av_1, Av_2, Av_3 linear unabhängig.

4) Seien $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann besitzen A und $A - \alpha \cdot E$ die gleichen Eigenvektoren.

5) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die keinen reellen Eigenwert hat.