Name:.. **Matr.-Nr.:**............... **Variante:** A

Antwortbogen

Teil I

Aufgabe I.1

a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -(a+5) & a^2-4a+4 & a-1 & 1 \\ -(a^2+3a-10) & -(a^2-4a+4) & 6 & a-2 \\ -(a+5) & a^2-4a+4 & a+5 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} -(a+5) & (a-2)^2 & a-1 & 1 \\ -(a+5)(a-2) & -(a-2)^2 & 6 & a-2 \\ -(a+5) & (a-2)^2 & a+5 & 1 \end{array}\right)$$

① $a=-5$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 49 & -6 & 1 \\ 0 & -49 & 6 & -7 \\ 0 & 49 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 49 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 49 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 < 3 = rg(A|b) \Rightarrow$ keine Lösung

② $a \neq -5$

2.1 $a=2$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 = rg(A|b) < 3 \Rightarrow$ mehrere Lösungen

2.2 $a \neq 2$

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -(a+5) & (a-2)^2 & a-1 & 1 \\ 0 & -(a-2)^2-(a-2)^3 & 6-(a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -(a+5) & (a-2)^2 & a-1 & 1 \\ 0 & -(a-2)^2(a-1) & 6-(a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

2.2.1 $a=1$

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 = rg(A|b) < 3 \Rightarrow$ mehrere Lösungen

2.2.2 $a \neq 1$

$rg(A) = 3 = rg(A|b) \Rightarrow$ eindeutig lösbar

Zusammenfassung: $a=-5$ keine Lösung

$a \in \{1, 2\}$ mehrere Lösungen

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1, 2\}$ eindeutig lösbar

b) $a=-3$

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 25 & -4 & 1 \\ 0 & 100 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

Für $a=-3$ existiert eine eindeutige Lösung $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe I.2 a) Da $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, reicht es aus, die lineare Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 zu zeigen.

Der Ansatz $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ liefert:

$$\lambda_1(2e_1+3e_2+e_3)+\lambda_2(3e_1+4e_2+e_3)+\lambda_3(e_1+2e_2+2e_3)=0 \iff$$

$$e_1(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3)+e_2(3\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3)+e_3(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)=0$$

(e_1,e_2,e_3) Basis $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&=0\\ 3\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3&=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3&=0 \end{aligned}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&2\\2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$rg(B)=3 \Rightarrow$ Das LGS $B\lambda=0$ besitzt nur die triviale Lösung $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow$ Die Gleichung $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0$ impliziert $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow a_1,a_2,a_3$ sind linear unabhängig $\Rightarrow a_1,a_2,a_3$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) $$f(a_1-a_2)=f(2e_1+3e_2+e_3-3e_1-4e_2-e_3)=f(-e_1-e_2)=$$
$$=-f(e_1)-f(e_2)=-{}_{E_3}\begin{pmatrix}15\\20\\8\end{pmatrix}-{}_{E_3}\begin{pmatrix}-11\\-15\\-7\end{pmatrix}={}_{E_3}\begin{pmatrix}-4\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

c) $${}_A M(f)_{E_3}={}_A M(Id)_{E_3}\,{}_{E_3}M(f)_{E_3}=\left({}_{E_3}M(Id)_A\right)^{-1}{}_{E_3}M(f)_{E_3}$$

$${}_{E_3}M(Id)_A=\left({}_{E_3}a_1, {}_{E_3}a_2, {}_{E_3}a_3\right)=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow {}_A\mathcal{M}(Id)_{E_3} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_A\mathcal{M}(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe I.3 Matrixschreibweise:

$$3x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2-4x_1+4x_2+3=0 \Leftrightarrow x^TAx+b^Tx+c=0$$

mit $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix}$, $c=3$

1) Diagonalisierung von A:

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-2^2=(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)=$$
$$=(1-\lambda)(5-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1;\ \lambda_2=5$$

- $\lambda_1=1$

$$Eig_A(1)=\ker(A-E)=\ker\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

- $\lambda_2=5$

$$Eig_A(5)=\ker(A-5E)=\ker\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Orthogonale Matrix: $B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Diagonalisierung: $A=B\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}}_{D}B^T$

Setze $y=B^Tx$, $d=B^Tb=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$.

$$x^TAx+b^Tx+c=0 \Leftrightarrow y^TDy+d^Ty+c=0 \Leftrightarrow$$

$$y_1^2+5y_2^2-\frac{8}{\sqrt{2}}y_1+3=0$$

2) Elimination des quadratischen Anteils mittels quadratische Ergänzung:

$$y_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}} y_1 = y_1^2 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} y_1 + 8 - 8 = \left(y_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 =$$
$$= (y_1 - 2\sqrt{2})^2 - 8$$

$$z_1 = y_1 - 2\sqrt{2}, \quad z_2 = y_2$$

$$y_1^2 + 5y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{2}} y_1 + 3 = 0 \Longleftrightarrow z_1^2 - 8 + 5z_2^2 + 3 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$z_1^2 + 5z_2^2 = 5 \Longleftrightarrow \frac{z_1^2}{5} + z_2^2 = 1$$

Die Normalform ist eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{5}$ und 1.

Teil II

Ⓐ

Aufgabe II.1

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ Eigenwerte von A v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren mit $\|v_i\|_2 = 1$ $\max_{\|x\|_2=1} x^T A x = \lambda_1 \quad \min_{\|x\|_2=1} x^T A x = \lambda_3$ $v_1^T A v_1 = \lambda_1 \quad v_3^T A v_3 = \lambda_3$ $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda)((2-\lambda)^2-1) = -(5+\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$ $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -5$ $\cdot \lambda_1 = 3 \quad Eig_A(3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdot \lambda_3 = -5 \quad Eig_A(-5) = \ker \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$3; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-5; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe II.2

a)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$\cos \angle(b, a-b) = \frac{\langle b, a-b \rangle}{\|b\|_2 \cdot \|a-b\|_2} = \frac{\langle b,a \rangle - \|b\|_2^2}{\|b\|_2 \cdot \|a-b\|_2}$ $\langle b,a \rangle = \|b\|_2 \cdot \|a\|_2 \cdot \cos \angle(b,a) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ $\cos \angle(b, a-b) = \frac{1-1}{\|b\|_2 \cdot \|a-b\|_2} = 0$	0

(A)

b)

Lösungsskizze:

$$\cos \measuredangle (a+b, a-b) = \frac{\langle a+b, a-b\rangle}{\|a+b\|_2 \cdot \|a-b\|_2} = \frac{\|a\|_2^2 - \|b\|_2^2}{\|a+b\|_2 \cdot \|a-b\|_2}$$

$$\|a+b\|_2 = \sqrt{\langle a+b, a+b\rangle} = \sqrt{\|a\|_2^2 + 2\langle a,b\rangle + \|b\|_2^2} =$$

$$= \sqrt{4+2\cdot 1+1} = \sqrt{7}$$

$$\|a-b\|_2 = \sqrt{\langle a-b, a-b\rangle} = \sqrt{\|a\|_2^2 - 2\langle a,b\rangle + \|b\|_2^2} =$$

$$= \sqrt{4-2+1} = \sqrt{3}$$

$$\cos \measuredangle (a+b, a-b) = \frac{4-1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Ergebnis:

$$\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Aufgabe II.3

a)

Lösungsskizze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ergebnis:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b)

Lösungsskizze:

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1, \quad \|a_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|c_2\|} \cdot c_2, \quad c_2 = a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1$$

$$\langle a_2, b_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (-2-1) = -\sqrt{3}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|c_2\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(A)

Aufgabe II.4

a)

Lösungsskizze:

$\langle u_1, u_2 \rangle = -2+2 = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2$

$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|_2} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\|u_2\|_2} u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_U x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-3+18) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$

$+ \frac{1}{3}(6-6+9) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b)

Lösungsskizze:

$\| x - P_U x \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 =$

$= \sqrt{45}$

Ergebnis:

$\sqrt{45}$

c)

Lösungsskizze:

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \langle u_1, v \rangle = v_1 + 2v_3 = 0$

$\langle u_2, v \rangle = -2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 4 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = -2 \end{matrix}$

Ergebnis:

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

A

Aufgabe III.1

1)	W	Sei $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_n a_n=\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\dots+\mu_n a_n \Leftrightarrow$ $(\lambda_1-\mu_1)a_1+(\lambda_2-\mu_2)a_2+\dots+(\lambda_n-\mu_n)a_n=0$ $\overset{a_1,\dots,a_n \text{ sind lin. unabh.}}{\Rightarrow} \lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\dots=\lambda_n-\mu_n=0$ $\Rightarrow \lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2,\ \dots,\ \lambda_n=\mu_n$ $\Rightarrow$ Die Darstellung ist eindeutig
2)	W	Sei $j\in\{1,\dots,r\}$. $Ah_j=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i h_i h_i^T h_j \overset{h_i^T h_j=0,\ i\neq j}{=} \lambda_j h_j h_j^T h_j=\lambda_j \Vert h_j\Vert_2^2 h_j=$ $=\lambda_j h_j \Rightarrow \lambda_j$ ist ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor h_j
3)	F	$\ker A=\ker\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\langle\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ $v_1=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; v_1,v_2,v_3 sind linear unabhängig $Av_1+Av_2+Av_3=A(v_1+v_2+v_3)=A\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow Av_1, Av_2, Av_3$ sind linear abhängig
4)	W	$Av=\lambda v,\ v\neq 0 \Leftrightarrow Av-\alpha v=\lambda v-\alpha v,\ v\neq 0 \Leftrightarrow$ $(A-\alpha E)v=(\lambda-\alpha)v,\ v\neq 0$
5)	F	$A\in\mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow \chi_A(x)=-x^3+ax^2+bx+c=0$ $\deg(\chi_A)=3 \Rightarrow \chi_A$ hat mindestens eine reelle Nullstelle $\Rightarrow A$ hat mindestens einen reellen Eigenwert