Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 15.08.2017

Klausur zur Höheren Mathematik II

SS 2017

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg'' einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage zwei Punkte und für eine richtige Begründung sechs Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(20 Pkt.)**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie $b_\alpha \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -6(\alpha-3)^2 & -4(\alpha-2) & 5(1-\alpha) \\ 3(\alpha^2-5\alpha+6) & 2(\alpha-2) & 2(\alpha-1) \\ 3(\alpha-3)^2 & 2(\alpha-2) & 3(\alpha-1) \end{pmatrix}, \ b_\alpha = \begin{pmatrix} 2-17\alpha \\ 7\alpha-2 \\ 10\alpha-1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$, $x \in \mathbb{R}^3$

1) eindeutig lösbar ist,
2) unlösbar ist,
3) mehr als eine Lösung besitzt.

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.1 (Fortsetzung):

Aufgabe I.2: **(12+14+6 Pkt.)**

Gegeben seien die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^3,\ p \mapsto \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix},$$

die Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_4[x]$ gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left\{2, 1+x, 1+x^2, 1+x^3, 1+x^4\right\}$$

sowie die Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}M(f)_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass es sich bei $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ um Basen der jeweiligen Vektorräume handelt.

2) Bestimmen Sie den Rang von ${}_{\mathcal{C}}M(f)_{\mathcal{B}}$, die Dimension des Kerns von f sowie eine Basis des Kerns von f.

3) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.2 (Fortsetzung):

Aufgabe I.3: **(8+14+6 Pkt.)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte von A.
2) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen (reellen) Eigenraums.
3) Ist A (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.3 (Fortsetzung):

Teil II

Aufgabe II.1: **(20 Pkt.)**

Bestimmen Sie mit der Methode der linearen Ausgleichsrechnung zu den folgenden Messwerten die Ausgleichskurve $y(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ zweiter Ordnung.

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	11	-6	-3	0

Ergebnis:

Lösungsweg:

Aufgabe II.2: **(10+10 Pkt.)**

Bestimmten Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse:	
$\det(A) =$	$\det(B) =$

Lösungsweg:

Aufgabe II.3: **(18 Pkt.)**

Berechnen Sie die orthogonale Projektion p des Vektors $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf den Untervektorraum

$$U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

des $\mathbb{R}^4$.

Ergebnis:

Lösungsweg:

Aufgabe II.4: **(22 Pkt.)**

Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass gilt

$$B^3 = \begin{pmatrix} -13 & 0 & -14 \\ 0 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:

Lösungsweg:

Teil III

Aufgabe III.1: **(8+8+8+8+8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $b_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gibt es eine reelle Zahl α sowie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = b_\alpha\}$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ bildet.

b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbare Matrizen, so ist stets auch $A + B$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

c) Sind $n, r \in \mathbb{N}$ und sind $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ paarweise orthogonal (bezüglich des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^n$), so sind $u_1, \ldots, u_r$ stets linear unabhängig (als Elemente des $\mathbb{R}^n$).

d) Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht invertierbar, so ist für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ auch die Matrix A^m nicht invertierbar.

e) Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, welcher unendlich viele verschiedene Untervektorräume besitzt, so gilt $n \geq 2$.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	