Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 20.07.2017

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik II

SS 2017

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen. Das Korrigieren mit Tippex ist ebenfalls **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(30 Pkt.)**

Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2m}x^{2m} \,|a_0, \cdots, a_{2m} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_{2m}[x]$.

i) Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum ist.

ii) Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$ folgendes Produkt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$ ein wohldefiniertes Skalarprodukt ist.

iii) Berechnen Sie $\|x^{2k}\|^2$, für alle $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$, wobei $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm ist.

Aufgabe I.2: **(30 Pkt.)**

Bestimmen Sie mit der Methode der linearen Ausgleichsrechnung zu den folgenden Messwerten eine Ausgleichskurve $y(t) = at^2 + bt + c$ zweiter Ordnung:

i	1	2	3	4	5
t_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	2	4	6

Aufgabe I.3: **(20 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung $M = U\Sigma V^\top$ mit $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ und $\sigma_1 \geq \sigma_2$ folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(20 Pkt.)**

Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung $PA = LR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.2: **(20 Pkt.)**

Sei V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum und seien $x, y, z \in V$ drei linear unabhängige Vektoren in V. Weiter sei $f : V \to V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f(x) = x + y, f(y) = z - x$ und $f(z) = y + z$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}'}M(f)_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B} = (x, y, z)$ und $\mathcal{B}' = (2x, x + y, x + z)$.

Aufgabe II.3: **(20 Pkt.)**

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Eigenraum zum größten Eigenwert von A.

Aufgabe II.4: **(20 Pkt.)**

Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Diagonalisieren Sie die Matrix A, das heißt, geben Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2$ die Eigenwerte von A sind.

Teil III

Aufgabe III.1: **(8+8+8+8+8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

a) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: Zerfällt ihr charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren, das heißt

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_2) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

dann ist A diagonalisierbar.

b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit rang$(A) = 2$ folgt $\dim(\text{Bild}(A^2)) \geq 1$.

c) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) > 0$ gilt: $\|Ax\|_2 \geq \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Sei $s : (f, g) \mapsto s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1 - x)\mathrm{d}x$ für $f, g \in C([0, 1])$. s definiert ein Skalarprodukt.

e) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ eine geeignete Matrix und $Q = A(A^\top A)^{-1}A^\top$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$\langle x, Qx\rangle = \|Qx\|_2^2.$$