Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 15.02.2018

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik II

WS 2017/18

Variante B

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Elektronische Hilfsmittel, insbesondere Taschenrechner, sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie im Feld ,,Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10+4 Pkt.)**

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (a+1)x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ ax_2 - ax_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

genau eine, keine bzw. mehr als eine Lösung?

b) Berechnen Sie für $a = -1$ alle Lösungen.

Aufgabe I.2: **(14 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der geordneten Basis

$$A = (a_1, a_2, a_3) = (1, x, x^2)$$

die folgende Darstellungsmatrix hat:

$${}_AM(f)_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM(f)_B$ von f bezüglich der geordneten Basis

$$B = (b_1, b_2, b_3) = (x - x^2, 1 + 2x + x^2, 1 + 3x + x^2).$$

Aufgabe I.3: **(12 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Normalform und den Typ der folgenden Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^T : 10x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(8 Pkt.)**

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \\ \lambda + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimen Sie alle Werte des Parameters λ, für die die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear abhängig sind.

Aufgabe II.2: **(9 Pkt.)**

Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

das Maximum bzw. das Minimum für $x^T A x$ und die zugehörigen Extremalstellen.

Aufgabe II.3: **(10+3 Pkt.)**

Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 : y = s a_1 + t a_2, \; s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{mit} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Orthogonal-Projektion von v auf E.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor der Orthogonal-Projektion von v auf E bezüglich der geordneten Basis (a_1, a_2).

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Gegeben sei die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 10 & 1 \\ -1 & 4 & -10 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimen Sie die Dimension des Kerns von f sowie eine Basis des Kerns von f.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Es existiert ein reelles lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten, welches eindeutig lösbar ist.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ beliebige linear unabhängige Vektoren. Dann sind $a + b$, $b + c$ und $c + a$ linear unabhängig.

c) Es exisitiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

d) Es sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ einer Matrix A. Dann ist v auch Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2.

e) Seien $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $E = uv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt $\|E\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$.