Lehrstuhl für Mathematik der Informationsverarbeitung **Aachen, den 21.08.2019**
Prof. Dr. Yubao Guo

Klausur zur Mathematik II

SS 2019

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(4+10 Pkt.)**

Gegeben seien die Funktionen

$$f : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2,$$
$$g : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ g(x) = 6x - 3 \text{ und}$$
$$h : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ h(x) = 12 - 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x).$$

a) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen von f, g und h. Legen Sie bei Ihrer Skizze Wert darauf, dass man die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen erkennen kann.
b) Berechnen Sie den Inhalt der von den Funktionsgraphen von f, g und h begrenzten Fläche in $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(7+5 Pkt.)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A.

b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^4$ so, dass $A\,x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Fortsetzung Lösung (ggf. auch wieder Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(8+6 Pkt.)**

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie an, ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie, wenn möglich, sowohl die Eigenwerte als auch die zugehörigen Eigenräume.

b) Bestimmen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Fortsetzung Lösung (ggf. auch wieder Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral mittels partieller Integration:

$$\int \ln(x^3) \cdot \ln(x^5)\; dx.$$

b) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\int \tfrac{9x^3+4x^2+2x+3}{x^4+x^2}\; dx.$$

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei die 5×5-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\det(A)$.

b) Bestimmen Sie die zweite Komponente x_2 der eindeutigen Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ von $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Hinweis:</u> Bei b) empfiehlt sich die Anwendung der Cramerschen Regel.

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Gegeben seien die Ebene $E = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle v, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$ und $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von x auf E.

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung

$$_{\mathcal{E}_3}M(f)_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_3$ von $\mathbb{R}^3$. Wir versehen den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nun jeweils mit einer neuen geordneten Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jeweils in Bezug auf die Standardbasis $\mathcal{E}_2$ bzw. $\mathcal{E}_3$. Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, d.h. berechnen Sie

$$_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}}.$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann sind auch die drei Vektoren $x - y$, $y - z$ und $z - x$ linear unabhängig.

c) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix, so dass ihre Potenz A^m invertierbar ist. Dann ist auch A selbst invertierbar.

d) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit Länge 1, die paarweise orthogonal zueinander sind. Das heißt, es gilt $v_i^\top v_j = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann sind die gegebenen Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

e) Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und α eine beliebige reelle Zahl. Ist dann $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A, so ist v auch ein Eigenvektor der Matrix $A + \alpha E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	