Teil I Variante A

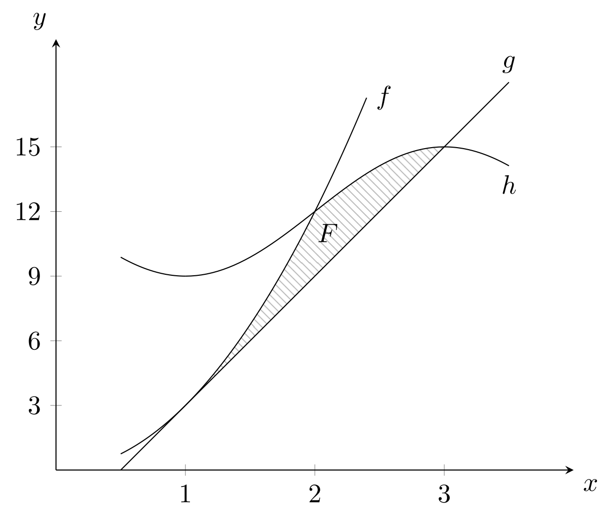
Aufgabe I.1: **(4+10 Pkt.)**

Gegeben seien die Funktionen

$$f : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2,$$
$$g : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ g(x) = 6x - 3 \text{ und}$$
$$h : [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}] \to \mathbb{R},\ h(x) = 12 - 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x).$$

a) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen von f, g und h. Legen Sie bei Ihrer Skizze Wert darauf, dass man die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen erkennen kann.
b) Berechnen Sie den Inhalt der von den Funktionsgraphen von f, g und h begrenzten Fläche in $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):
a)



$\boxed{4}$

b) Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der Funktionen. Es gilt $f(1) = 3 = g(1)$, $f(2) = 12 = h(2)$ und $g(3) = 15 = h(3)$. $\boxed{2}$

Somit berechnet sich der gesuchte Flächeninhalt F wie folgt.

$$\begin{aligned}
F &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 h(x)dx - \int_1^3 g(x)dx \qquad \boxed{3}\\
&= \int_1^2 3x^2 dx + \int_2^3 12 - 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x)dx - \int_1^3 6x - 3dx\\
&= [x^3]_1^2 + [12x + \tfrac{6}{\pi}\cos(\tfrac{\pi}{2}x)]_2^3 - [3x^2 - 3x]_1^3\\
&= \underbrace{(8-1)}_{\boxed{1}} + \underbrace{(12(3-2) + \tfrac{6}{\pi}(0-(-1)))}_{\boxed{2}} - \underbrace{((27-9)-(3-3))}_{\boxed{1}}\\
&= 7 + 12 + \tfrac{6}{\pi} - 18\\
&= 1 + \tfrac{6}{\pi} \qquad \boxed{1}
\end{aligned}$$

Aufgabe I.2: **(7+5 Pkt.)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A.

b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^4$ so, dass $A\,x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

(a) Das Gauss-Verfahren kann folgendermaßen angewendet werden:

$$A \xrightarrow[Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 - Z_1 \\ \vdots}} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z_3 - Z_2 \\ Z_4 - Z_2}} \cdots \xrightarrow{Z_4 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big\} \; \boxed{6}$$

Wir erhalten also die LR-Zerlegung

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \Big\} \; \boxed{1}$$

(b) Wir können das System $Ax = b$ nun in zwei Schritten lösen:

1.) Äußeres System:

$$L \cdot y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Big\} \; \text{Ansatz } \boxed{1} \;\; \text{Ergebnis } \boxed{2}$$

2.) Inneres System:

$$R \cdot x = y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Big\} \; \boxed{2}$$

Aufgabe I.3: **(8+6 Pkt.)**

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie an, ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie, wenn möglich, sowohl die Eigenwerte als auch die zugehörigen Eigenräume.

b) Bestimmen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

(a) A ist eine reelle, <u>symmetrische</u> Matrix und somit diagonalisierbar. $\}\boxed{1}$

Bestimme die Eigenwerte von A. Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) \overset{\boxed{1}}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(6-\lambda) - 4(6-\lambda)$$
$$= (12 - 8\lambda + \lambda^2)(6-\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda)^2 \qquad \}\boxed{1}$$

Also gilt $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 2$ oder $\lambda = 6$. Es gibt somit nur die zwei Eigenwerte 2 und 6. $\}\boxed{1}$

Bestimme die Eigenvektoren als $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \ker(A - \lambda E)$:

Für $\lambda = 2$ gilt

$$(A - 2E) \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

genau dann, wenn $x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Da 2 einfache Nullstelle ist, ist

$Eig_A(2) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ der vollständige Eigenraum zu $\lambda = 2$. $\}\boxed{2}$

Für $\lambda = 6$ gilt

$$(A - 2E) \cdot x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

genau dann, wenn $x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t, s \in \mathbb{R}$. Da 6 doppelte Nullstelle ist, ist $\mathrm{Eig}_A(6) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ der vollständige Eigenraum zu $\lambda = 6$. $\}\boxed{2}$

(b) Wir nutzen die Eigenwertzerlegung aus Teil a). Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind dabei othogonal.

Für die Elemente der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathrm{Eig}_A(6)$ $\boxed{1}$

gilt $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, daher sind auch diese orthogonal. $\boxed{1}$

Durch Normieren aller Eigenvektoren erhalten wir folglich eine orthogonale Matrix
$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. $\boxed{1}$

Für diese gilt $A = UDU^T$ mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. $\boxed{1}$

Für A^n gilt daher

$$\begin{aligned}
A^n &= (UDU^T)^n \\
&= (UDU^T)(UDU^T)\dots(UDU^T) \\
&= UD(U^TU)D(U^TU)\dots(U^TU)DU^T) \\
&= UD(E)D(E)\dots(E)DU^T) \\
&= UD^nU^T \qquad \boxed{1} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{6^n}{2} & 0 & \frac{6^n}{2} - 2^{n-1} \\ 0 & 6^n & 0 \\ \frac{6^n}{2} - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + \frac{6^n}{2} \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}
\end{aligned}$$

Teil II Variante A

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral mittels partieller Integration:

$$\int \ln(x^3) \cdot \ln(x^5)\ dx.$$

b) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\int \tfrac{9x^3+4x^2+2x+3}{x^4+x^2}\ dx.$$

Ergebnis:	
a) $15x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$	b) $2\ln(x) - 3x^{-1} + \frac{7}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a)

$$\begin{aligned} \int \ln(x^3) \cdot \ln(x^5)\ dx &= 15 \int (\ln(x))^2\ dx \overset{\boxed{2}}{\underset{PI}{=}} 15(x(\ln(x))^2 - \int 2\ln(x)\ dx) \\ &\overset{\boxed{2}}{\underset{PI}{=}} 15(x(\ln(x))^2 - 2(x\ln(x) - \int 1\ dx)) \\ &= 15x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2). \quad \boxed{1} \end{aligned}$$

b) Partialbruchzerlegung:

$$\left.\tfrac{9x^3+4x^2+2x+3}{x^2(x^2+1)} \overset{!}{=} \tfrac{A}{x} + \tfrac{B}{x^2} + \tfrac{Cx+D}{x^2+1} = \tfrac{x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(A)+1(B)}{x^2(x^2+1)} \right\} \boxed{2}$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $B = 3$, $A = 2$, $B + D = 4$ und $A + C = 9$. Durch äquivalente Umformung erhalten wir $A = 2$, $B = 3$, $C = 7$ und $D = 1$. $\boxed{1}$

Somit folgt

$$\left.\int \tfrac{9x^3+4x^2+2x+3}{x^4+x^2}\ dx = \int \tfrac{2}{x} + \tfrac{3}{x^2} + \tfrac{7x+1}{x^2+1}\ dx = 2\ln(x) - 3x^{-1} + \tfrac{7}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x). \right\} \boxed{2}$$

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei die 5×5-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\det(A)$.

b) Bestimmen Sie die zweite Komponente x_2 der eindeutigen Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ von $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Bei b) empfiehlt sich die Anwendung der Cramerschen Regel.

Ergebnis:	
a) 8	b) $-\frac{3}{4}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

(a) Wir entwickeln nach Zeilen und Spalten von A:

$$\left.\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (+1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (+1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (+1) \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -4 + 12 = 8.
\end{aligned}\right\} \text{Ansatz } \boxed{1} \text{ Rechnung } \boxed{4}$$

(b) Nach der Cramer'schen Regel reicht es die Determinante der Matrix

$$\left.A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\right\} \boxed{1}$$

in der die zweite Spalte durch den Lösungsvektor ersetzt wurde, zu bestimmen. Die Berechnung in (a) ändert sich dadurch nur im vorletzten Schritt, so dass

$$\left.\begin{aligned}\det(A_2) &= (+1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}\\ &= (+1)\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} + (+1)\cdot(-1)\cdot(+2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ &= -12+6=-6.\end{aligned}\right\}\text{Rechnung }\boxed{3}$$

Wir erhalten somit $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\frac{3}{4}$. $\Big\}\ \boxed{1}$

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Gegeben seien die Ebene $E = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle v, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$ und $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von x auf E.

Ergebnis:
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Nach Vorlesung kann jeder Vektor, speziell $x \in \mathbb{R}^3$, geschrieben werden als $x = v + v^\perp$ mit $v \in E$ und $v^\perp \in E^\perp$, wobei $E^\perp$ das orthogonale Komplement von E und v die orthogonale Projektion von x auf E ist. Nach der Definition von E ist

$\overbrace{E^\perp = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}^{\boxed{1}}$. Daher ist $\overbrace{\left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ eine Orthonormalbasis von } E^\perp}^{\boxed{1}}$.

$$\left.\text{Somit ist } v^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \boxed{4}$$

$$\left.\text{und } v = x - v^\perp = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}. \right\} \boxed{4}$$

Alternativ: $\overbrace{\text{Basis } \{b_1, b_2\} \text{ von } E \text{ bestimmen}}^{\boxed{4}}$ und $\overbrace{\text{mittels Gram-Schmidt orthogonalisieren}}^{\boxed{3}}$.

Dann folgt $v = \langle x, b_1 \rangle b_1 + \langle x, b_2 \rangle b_2. \quad \} \boxed{3}$

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung

$$ {}_{\mathcal{E}_3}M(f)_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} $$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_3$ von $\mathbb{R}^3$. Wir versehen den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nun jeweils mit einer neuen geordneten Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, gegeben durch

$$ a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} $$

und

$$ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, $$

jeweils in Bezug auf die Standardbasis $\mathcal{E}_2$ bzw. $\mathcal{E}_3$. Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, d.h. berechnen Sie

$$ {}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}}. $$

Ergebnis:
$\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 3 & 2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

${}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}}$ lässt sich wie folgt als Matrixprodukt schreiben:

$$ {}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{E}_3}\,{}_{\mathcal{E}_3}M(f)_{\mathcal{E}_2}\,{}_{\mathcal{E}_2}E_{\mathcal{A}}. \quad \Big\} \boxed{2} $$

Da ${}_{\mathcal{E}_3}M(f)_{\mathcal{E}_2}$ bereits gegeben ist, bestimmen wir ${}_{\mathcal{E}_2}E_{\mathcal{A}}$ und ${}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{E}_3}$, um das Matrixprodukt berechnen zu können. Da $\mathcal{A}$ und in Bezug auf $\mathcal{E}_2$ gegeben ist, erhalten wir sofort

$$ {}_{\mathcal{E}_2}E_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Big\} \boxed{2} $$

d.h. a_1 und a_2 sind die Spalten der Matrix. $\mathcal{B}$ entsteht durch eine Permutation der Basisvektoren von $\mathcal{E}_3$, sodass wir ${}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{E}_3}$ ebenfalls schnell angeben können. Zunächst sind

$$ e_1 = b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} $$

die Koordinaten von e_1 bezüglich $\mathcal{B}$, d.h. die erste Spalte von ${}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{E}_3}$. Analog verfahren wir für die zweite und dritte Spalte, d.h. zusammen erhalten wir die Permutationsmatrix

$$ {}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \Bigg\} \boxed{2} $$

Nun bilden wir das Matrixprodukt:

$$ {}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 20 & 5 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 3 & 2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}. \quad \Bigg\} \boxed{4} $$

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann sind auch die drei Vektoren $x - y$, $y - z$ und $z - x$ linear unabhängig.

c) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix, so dass ihre Potenz A^m invertierbar ist. Dann ist auch A selbst invertierbar.

d) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit Länge 1, die paarweise orthogonal zueinander sind. Das heißt, es gilt $v_i^\top v_j = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann sind die gegebenen Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

e) Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und α eine beliebige reelle Zahl. Ist dann $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A, so ist v auch ein Eigenvektor der Matrix $A + \alpha E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a) F	Gäbe es ein lineares f mit den gegebenen Daten, müsste gelten $$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$ Dies steht aber im Widerspruch zur Forderung $$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$
b) F	In der Tat ist die Summe der drei Vektoren $x-y$, $y-z$ und $z-x$ Null, es gibt also eine nichttriviale verschwindende Linearkombination dieser Vektoren. Sie sind demnach (nach Definition) linear abhängig.
c) W	Eine Matrix B ist invertierbar genau dann, wenn $\det B \neq 0$. Nach Voraussetzung ist also $\det(A^m)\neq 0$. Wegen $\det(A^m)=(\det A)^m$ folgt $\det A\neq 0$, A ist also invertierbar.
d) W	Wir müssen zeigen, dass für alle $j\in\{1,\dots,m\}$ aus $0=\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ folgt $\lambda_j=0$. Multiplizieren wir die obige Gleichung von links mit $v_j^\top$, so ergibt sich $$0=v_j^\top 0=\sum_{i=1}^m \lambda_i v_j^\top v_i \;=\; \sum_{i\neq j}\lambda_i \underbrace{v_j^\top v_i}_{=0}+\lambda_j v_j^\top v_j \;=\; \lambda_j \underbrace{\|v_j\|_2^2}_{=\delta_{jj}=1}=\lambda_j \quad\Rightarrow\quad \lambda_j=0.$$
e) W	Ist v ein Eigenvektor von A, so gibt es ein λ so, dass $Av=\lambda v$ gilt. Dann gilt aber auch $(A+\alpha E_n)v=Av+\alpha E_n v=\lambda v+\alpha v=(\lambda+\alpha)v$, v ist also auch Eigenvektor von $A+\alpha E_n$.