Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 11.02.2020

Wiederholungsklausur zur Mathematik II

WS 2019/20

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(5+8 Pkt.)**

a) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Interval $[a, b]$ mit $a < b$, welche im offenen Interval (a, b) stetig differenzierbar sind. Beweisen Sie unter Anwendung des Hauptsatzes der Intergral- und Differentialrechnung, dass

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\ .$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin(x)\,dx\ .$$

Hinweis: Es gilt $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(10+5 Pkt.)**

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenräume.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, so dass $C^2 = A$.

Hinweis: Es gilt, dass $\sqrt{-1} = i$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(8+4 Pkt.)**

Gegeben sei die folgende quadratische Form $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$q_a(x_1, x_2, x_3) := ax_1^2 + (a+3)x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Bestimmen Sie

a) die symmetrische Matrix $B_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $x^\top B_a x = q_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $a \in \mathbb{R}$,

b) die Menge aller Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die B_a positiv definit ist,

c) die Menge aller Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die B_a negativ definit ist.

Hinweis: Nutzen Sie das Hauptminorantenkriterium.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Funktion mit

$$f\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2}$ zur kanonischen Basis.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}$ zur Basis

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+4x+3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx.$

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: **(4+4+2 Pkt.)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 7 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$C := AB$$

Ergebnis:		
a)	b)	c)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(1+4+5 Pkt.)**

Gegeben sei der Unterraum

$$E = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

a) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $E^\perp$ von E?

b) Geben Sie eine Basis von $E^\perp$ an.

c) Finden Sie die eindeutige Zerlegung von

$$z = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

in $z = z_E + z_{E^\perp}$ mit $z_E \in E$ und $z_{E^\perp} \in E^\perp$. Geben Sie als Lösung z_E und $z_{E^\perp}$ an.

Ergebnis:		
a)	b)	c)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt die Ungleichung

$$\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$$

wobei $\|A\|_p = \sup_{x:\|x\|_p\leq 1} \|Ax\|_p$ für $p = 1, \infty$ die bekannten Matrixnormen aus der Vorlesung sind.

b) Sei $a = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ und $E = \{z \in \mathbb{R}^4 \colon \langle z, a\rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Es gilt $\dim(E^\perp) = 2$.

c) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in [a, b]$ mit $a < b$ die Ungleichung $|f(x)| \leq |g(x)|$ gilt. Dann gilt für diese Funktionen auch die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

d) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Die Menge

$$U := \{f \in \mathbb{R}_n[x] :\ f(0) \cdot f(3) = 0\}$$

ist ein Untervektorraum des Vektorraums

$$\mathbb{R}_n[x] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n :\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}\ .$$

e) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $v_\alpha = \begin{pmatrix}1, & 2, & \alpha\end{pmatrix}^T$ ein Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ ist.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	