

# Wiederholungsklausur zur Mathematik II

WS 2019/20

Variante B

Name	Matrikelnr.

## Hinweise

---

### Zugelassene Hilfsmittel:

Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrücke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

### Bewertung:

Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

- I:** (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.
- II:** (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter „Lösungsweg“ einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.
- III:** (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.  
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

**Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.**

Viel Erfolg!

# Teil I

---

**Aufgabe I.1:****(5+8 Pkt.)**

- a) Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$ , welche im offenen Intervall  $(a, b)$  stetig differenzierbar sind. Beweisen Sie unter Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung, dass

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx .$$

- b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin(x) dx .$$

**Hinweis:** Es gilt  $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**

**Aufgabe I.2:****(10+5 Pkt.)**Sei  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Ist  $A$  diagonalisierbar? Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenräume.
- b) Bestimmen Sie eine Matrix  $C \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ , so dass  $C^2 = A$ .

**Hinweis:** Es gilt, dass  $\sqrt{-1} = i$ .**Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**

**Aufgabe I.3:****(8+4 Pkt.)**

Gegeben sei die folgende quadratische Form  $q_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$q_a(x_1, x_2, x_3) := ax_1^2 + (a+3)x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Bestimmen Sie

- die symmetrische Matrix  $B_a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so dass  $x^\top B_a x = q_a(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  und  $a \in \mathbb{R}$ ,
- die Menge aller Parameter  $a \in \mathbb{R}$ , für die  $B_a$  positiv definit ist,
- die Menge aller Parameter  $a \in \mathbb{R}$ , für die  $B_a$  negativ definit ist.

**Hinweis:** Nutzen Sie das Hauptminorantenkriterium.

**Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**

# Teil II

## Aufgabe II.1:

(5+5 Pkt.)

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Funktion mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  ${}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2}$  zur kanonischen Basis.  
b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}$  zur Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ergebnis:	
a)	b)

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

**Aufgabe II.2:****(5+5 Pkt.)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx,$

b)  $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1 + e^{3x}} dx.$

Ergebnis:	
a)	b)

**Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**

**Aufgabe II.3:****(4+4+2 Pkt.)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$C := AB$$

<b>Ergebnis:</b>		
a)	b)	c)

**Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**

**Aufgabe II.4:****(1+4+5 Pkt.)**

Gegeben sei der Unterraum

$$E = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

- Welche Dimension hat das orthogonale Komplement  $E^\perp$  von  $E$ ?
- Geben Sie eine Basis von  $E^\perp$  an.
- Finden Sie die eindeutige Zerlegung von

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

in  $z = z_E + z_{E^\perp}$  mit  $z_E \in E$  und  $z_{E^\perp} \in E^\perp$ . Geben Sie als Lösung  $z_E$  und  $z_{E^\perp}$  an.

<b>Ergebnis:</b>		
a)	b)	c)

**Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):**



# Teil III

## Aufgabe III.1:

(4+4+4+4+4 Pkt.)

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Sei  $a = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$  und  $E = \{z \in \mathbb{R}^4 : \langle z, a \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ . Es gilt  $\dim(E^\perp) = 2$ .

b) Es gibt ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass  $v_\alpha = (1, 2, \alpha)^T$  ein Eigenvektor von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  ist.

c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt die Ungleichung

$$\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$$

wobei  $\|A\|_p = \sup_{x: \|x\|_p \leq 1} \|Ax\|_p$  für  $p = 1, \infty$  die bekannten Matrixnormen aus der Vorlesung sind.

d) Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$ . Die Menge

$$U := \{f \in \mathbb{R}_n[x] : f(0) \cdot f(3) = 0\}$$

ist ein Untervektorraum des Vektorraums

$$\mathbb{R}_n[x] = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

e) Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit der Eigenschaft, dass für alle  $x \in [a, b]$  mit  $a < b$  die Ungleichung  $|f(x)| \leq |g(x)|$  gilt. Dann gilt für diese Funktionen auch die Ungleichung

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.**

# Viel Erfolg!

### Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	