Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Yubao Guo

Aachen, den 11.02.2020

Wiederholungsklausur zur Mathematik II

WS 2019/20

Variante B

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter „Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I Variante B

Aufgabe I.1: **(5+8 Pkt.)**

a) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Interval $[a, b]$ mit $a < b$, welche im offenen Interval (a, b) stetig differenzierbar sind. Beweisen Sie unter Anwendung des Hauptsatzes der Intergral- und Differentialrechnung, dass

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\ .$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin(x)\ dx\ .$$

Hinweis: Es gilt $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Da die Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, gilt nach der Produktregel für alle $x \in (a, b)$,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Durch das Integrieren beider Seiten dieser Gleichung erhalten wir,

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Da die Ableitung von $(fg)(x)$ stetig **(1P)** auf dem Intervall (a, b) ist, gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Gleichung

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Durch das Subtrahieren von $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ und den Hauptsatz erhalten wir somit die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b (fg)'(x)\,dx - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ \Leftrightarrow\ [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(1P)} \end{aligned}$$

b) Wir berechnen zunächst das allgemeinere Integral

$$\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx\ .$$

Da $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ eine periodische Funktion ist, verwenden wir partielle Integration zur Berechnung des Integrals. Die partielle Integration wird mit $g'(x) = e^{-x}$ und $f(x) = \sin(x)$ durchgeführt. **(1P)**
Dazu stellen wir fest, dass $g(x) = -e^{-x}$ und $\sin'(x) = \cos(x)$ erfüllt ist. **(1P)**
Somit gilt,

$$\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx = [-e^{-x}\sin(x)]_a^b + \int_a^b e^{-x}\cos(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Wir können dieses Argument für $g'(x) = e^{-x}$ und $f(x) = \cos(x)$ wiederholen. Dies führt zu

$$\int_a^b e^{-x}\cos(x)\,dx = [-e^{-x}\cos(x)]_a^b + \int_a^b e^{-x}(-\sin(x))\,dx = [-e^{-x}\cos(x)]_a^b - \int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Zusammenfassend finden wir somit die Gleichung

$$\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx = [-e^{-x}\sin(x)]_a^b + [-e^{-x}\cos(x)]_a^b - \int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Addieren von $\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx$ und Multiplizieren mit $\frac{1}{2}$ ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx &= \frac{1}{2}\Big[[-e^{-x}\sin(x)]_a^b + [-e^{-x}\cos(x)]_a^b\Big] \qquad \textbf{(1P)}\\ &= \frac{1}{2}\Big[-e^{-b}\sin(b) - e^{-b}\cos(b) + e^{-a}\sin(a) + e^{-a}\cos(a)\Big]\ . \qquad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Um das Integral zu berechnen setzen wir nun $b = \frac{\pi}{4}$ und $a = -\frac{\pi}{4}$. Damit erhalten wir,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Aufgabe I.2: **(10+5 Pkt.)**

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenräume.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, so dass $C^2 = A$.

Hinweis: Es gilt, dass $\sqrt{-1} = i$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Wir berechnen zuerst das characteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 8 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 16) \\ &= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4). \qquad \textbf{(2P)} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. **(1P)**

Wir bestimmen den Eigenraum von $\lambda_1 = -4$:

$$\mathrm{Eig}_A(-4) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \textbf{(2P)}$$

Wir bestimmen den Eigenraum von $\lambda_2 = \lambda_3$:

$$\mathrm{Eig}_A(4) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \textbf{(2P)}$$

A ist somit diagonalisierbar, da $\mathrm{alg}(-4) = 1 = \mathrm{geo}(-4)$ und $\mathrm{alg}(4) = 2 = \mathrm{geo}(4)$. **(2P)**

b) Wir bestimmen eine invertierbare Matrix B, ihr inverses B^{-1} und eine Diagonalmatrix D, so dass

$$A = BDB^{-1}$$

Die Matrizen B und D bestehen aus den Eigenvektoren bzw. Eigenwerten von A und können direkt aus Aufgabenteil a) abgelesen werden:

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1P)}$$

Eine Anwendung des Gauss-Verfahrens liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(Diese Rechnung ergibt 2P)
Damit ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten eine passende Matrix C indem wir nutzen, dass $BD^{\frac{1}{2}}B^{-1} \cdot BD^{\frac{1}{2}}B^{-1} = BDB^{-1} = A$:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -i & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+i & 2-2i & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Diese Rechnung ergibt 2P)

Aufgabe I.3: **(1+7+4 Pkt.)**

Gegeben sei die folgende quadratische Form $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$q_a(x_1, x_2, x_3) := ax_1^2 + (a+3)x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Bestimmen Sie

a) die symmetrische Matrix $B_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $x^\top B_a x = q_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $a \in \mathbb{R}$,

b) die Menge aller Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die B_a positiv definit ist,

c) die Menge aller Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die B_a negativ definit ist.

Hinweis: Nutzen Sie das Hauptminorantenkriterium.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Für

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a+3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1P)}$$

gilt

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = x^\top B_a x.$$

b) Da B_a symmetrisch ist, können wir das Hauptminorantenkriterium benutzen.

- $\det(a) = a > 0$ **(1P)**
- $\det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{pmatrix} = a^2 + 3a - 4 = (a-1)(a+4) > 0$ **(1P)**, falls $a > 1$ oder $a < -4$. **(1P)**
- $\det \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a+3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 - 2a - 4 = (a+1-\sqrt{5})(a+1+\sqrt{5}) > 0$ **(1P)**, falls $a > -1+\sqrt{5}$ oder $a < -1-\sqrt{5}$. **(1P)**

Da $a > 0$ gelten muss, können die Bedingungen $a < -1-\sqrt{5}$ und $a < -4$ nicht gleichzeitig erfüllt sein. Damit alle drei Determinanten positiv sind, muss also gelten $a > 1$ und $a > -1+\sqrt{5}$. Da $-1+\sqrt{5} > 1$, ist nach Hauptminorantenkriterium die quadratische Form q_a positiv definit genau dann wenn $a > -1+\sqrt{5}$. **(2P)**

c) Da B_a symmetrisch ist, können wir das Hauptminorantenkriterium auf $-B_a$ anwenden. **(Für korrekte Anwendung des Hauptminorantenkriteriums: 1P)**. Damit B_a negativ definit ist muss also gelten

- $\det(a) < 0$
- $\det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{pmatrix} > 0$ **(1P)**
- $\det \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a+3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} < 0\,.$ **(1P)**

Nach Aufgabenteil a) folgt also, dass $a < 0$, $a < -4$ und $-1-\sqrt{5} < a < -1+\sqrt{5}$ gelten muss. Da $-1-\sqrt{5} > -4$ gilt, erfüllt somit kein $a \in \mathbb{R}$ alle drei Bedingungen. Die Matrix ist somit für kein $a \in \mathbb{R}$ negativ definit. **(1P)**

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Funktion mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2}$ zur kanonischen Basis.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}$ zur Basis

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Ergebnis:	
a) Ergebnis Ba	b) Ergebnis Bb

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

(a) Wir bestimmen zuerst das Bild der kanonischen Einheitsvektoren, d.h.

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \underbrace{f\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{2\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}}_{\textbf{(1P)}} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

und

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}}_{\textbf{(1P)}} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung

$${}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1P)}$$

b) Um ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}$ zu bestimmen nutzen wir, dass

$$\begin{aligned}{}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} &={}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{E_2} \cdot {}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2} \cdot {}_{E_2}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}} \qquad \textbf{(1P)}\\ &= \left({}_{E_2}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}\right)^{-1} \cdot {}_{E_2}\mathcal{M}(f)_{E_2} \cdot {}_{E_2}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}. \qquad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Die Matrix ${}_{E_2}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}$ besteht aus den Basisvektoren von $\mathcal{B}$, d.h.

$${}_{E_2}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \textbf{(1P)}$$

und damit

$${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(\mathrm{Id})_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ergibt sich nun als

$$\begin{aligned}{}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^{3x}}\, dx.$

Ergebnis:	
a) $2\ln(2) - \ln(3)$	b) $\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(\frac{9}{2})$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Um das Integral zu berechnen nutzen wir Partialbruchzerlegung. Zunächst gilt,

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Damit müssen wir Parameter $A, B \in \mathbb{R}$ bestimmen, derart dass

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\ .$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem,

$$2A + B = 0 \text{ und } A + B = 1\ .$$

Dieses hat die Lösung $A = -1$ und $B = 2$ **(2P)**. Angewendet auf das Integral folgt,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx &= -\int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx + 2\int_0^2 \frac{1}{x+2}\, dx \\ &= -[\ln(x+1)]_0^2 + 2[\ln(x+2)]_0^2 \\ &= 2\ln(2) - \ln(3)\ . \qquad \textbf{(2P)}\end{aligned}$$

b) Durch Addieren von $0 = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} - \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$ erhalten wir die Integrale

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^{3x}}\, dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{1+e^{3x}}{1+e^{3x}}\, dx + \int_0^{\ln(2)} \frac{-e^{3x}}{1+e^{3x}}\, dx \qquad \textbf{(2P)}$$

Das erste Integral hat den Wert $\ln(2)$ für das zweite Integral gilt

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{-e^{3x}}{1+e^{3x}}\, dx = -\frac{1}{3}[\ln(1+e^{3x})]_0^{\ln(2)} = -\frac{1}{3}\ln(\frac{9}{2})\ . \qquad \textbf{(2P)}$$

Zusammenfassend erhalten wir das Ergebnis

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx = \ln(2) - \frac{1}{3}\ln(\frac{9}{2})\ . \qquad \textbf{(1P)}$$

Alternative. Alternativ kann man die Substitution $y = e^{3x}$ **(1P)** durchführen. Dies führt auf das Integral

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^{3x}}\,dx = \int_1^8 \frac{1}{1+y}\frac{1}{3y}\,dy\;. \qquad \textbf{(1P)}$$

Das zweite Integral lässt sich mit einer Partialbruchzerlegung lösen:

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B}{3y} = \frac{1}{1+y}\frac{1}{3y}\;. \qquad \textbf{(1P)}$$

Es ergibt sich $B = 1$, $3A + B = 0$ und $A = -\frac{1}{3}$. Somit,

$$\begin{aligned}\int_1^8 \frac{1}{1+y}\frac{1}{3y}\,dy &= -\frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{1+y}\,dy + \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{y}\,dy \\ &= -\frac{1}{3}[\ln(1+y)]_1^8 + \frac{1}{3}\ln(8) = \ln(2) - \frac{1}{3}\ln(\frac{9}{2}) \qquad \textbf{(2P)}\end{aligned}$$

Aufgabe II.3: **(4+4+2 Pkt.)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$C := AB$$

Ergebnis:		
a)	b)	c)
-20	-8	160

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

1. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \overset{\textbf{(3P)}}{=} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ -5 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} -5 & 7 & -10 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -20 \qquad \textbf{(1P)}$$

2. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\textbf{(1P)}}{=} \underbrace{(-1)}_{\textbf{(1P)}} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\textbf{(1P)}}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(-4)(-2) = -8 \qquad \textbf{(1P)}$$

3. Es gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-20)(-8) = 160 \qquad \textbf{(2P)}$$

Aufgabe II.4: **(1+4+5 Pkt.)**

Gegeben sei der Unterraum

$$E = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

a) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $E^\perp$ von E?

b) Geben Sie eine Basis von $E^\perp$ an.

c) Finden Sie die eindeutige Zerlegung von

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

in $z = z_E + z_{E^\perp}$ mit $z_E \in E$ und $z_{E^\perp} \in E^\perp$. Geben Sie als Lösung z_E und $z_{E^\perp}$ an.

Ergebnis:		
a)	b)	c)
Ergebnis B	Ergebnis B	Ergebnis B

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

(a) Für die Dimension von $E^\perp$ gilt $\dim(E^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(E) = 4 - 2 = 2.$ **(1P)**

(b) Nach Definition gilt, dass $x \in E^\perp$ genau dann, wenn

$$\left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \qquad \textbf{(1P)}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$x \in E^\perp \Leftrightarrow x \in \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Indem wir $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ setzen, erhalten wir

$$x = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Damit gilt

$$E^\perp = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(1P)}$$

(c) Wir benötigen ONBs von E und $E^\perp$. Benutze Gram-Schmidt und erhalte

$$b_1^E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$c_2^E = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}, \qquad \textbf{(2P)}$$

$$b_2^E = c_2^E.$$

Damit ist $\{b_1^E, b_2^E\}$ eine ONB von E. Da $\langle c_1^{E^\perp}, c_2^{E^\perp}\rangle = 0$ für

$$c_1^{E^\perp} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_2^{E^\perp} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1P)}$$

ist $\{b_1^{E^\perp}, b_2^{E^\perp}\} = \{\frac{1}{3}c_1^{E^\perp}, c_2^{E^\perp}\}$ eine ONB von $E^\perp$. Wir können nun die Komponenten z_E und $z_{E^\perp}$ wie folgt als Projektionen von z auf E bzw. $E^\perp$ berechnen.

$$z_E = \langle z, b_1^E\rangle b_1^E + \langle z, b_2^E\rangle b_2^E = \frac{11}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{9}\\\frac{20}{9}\\\frac{23}{9}\\0\end{pmatrix} \qquad \textbf{(1P)}$$

$$z_{E^\perp} = \langle z, b_1^{E^\perp}\rangle b_1^{E^\perp} + \langle z, b_2^{E^\perp}\rangle b_2^{E^\perp} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\-\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}\\4\end{pmatrix} \qquad \textbf{(1P)}$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Sei $a = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ und $E = \{z \in \mathbb{R}^4 \colon \langle z, a \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Es gilt $\dim(E^\perp) = 2$.

b) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $v_\alpha = \begin{pmatrix}1, & 2, & \alpha\end{pmatrix}^T$ ein Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ ist.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt die Ungleichung

$$\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$$

wobei $\|A\|_p = \sup_{x:\|x\|_p\leq 1} \|Ax\|_p$ für $p = 1, \infty$ die bekannten Matrixnormen aus der Vorlesung sind.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Die Menge

$$U := \{f \in \mathbb{R}_n[x] : \ f(0) \cdot f(3) = 0\}$$

ist ein Untervektorraum des Vektorraums

$$\mathbb{R}_n[x] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}\,.$$

e) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in [a, b]$ mit $a < b$ die Ungleichung $|f(x)| \leq |g(x)|$ gilt. Dann gilt für diese Funktionen auch die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	F	Da $E^\perp = \mathrm{span}\{a\}$, gilt $\dim(E^\perp) = 1$
b)	F	Es ist $Av_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3\alpha \end{pmatrix}$. Damit $Av_\alpha = \lambda v_\alpha$ müsste somit gleichzeitig $1 = \lambda$ und $4 = 2\lambda$ gelten. Widerspruch!
c)	F	Betrachte z.B. die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **(1P)** Dann gilt $\|A\|_\infty = \max\{3, 3\} = 3$ **(1P)** und $\|A\|_1 = \max\{2, 4\} = 4$. **(1P)** Somit gilt $\|A\|_1 > \|A\|_\infty$.
d)	F	Betrachte $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = -3 + x$, dann gilt $f_1(0) \cdot f_1(3) = 0 \cdot 3 = 0$ und $f_2(0) \cdot f_2(3) = (-3) \cdot 0 = 0$. Somit gilt $f_1, f_2 \in U$. Für $g(x) := f_1(x) + f_2(x) = -3 + 2x$ gilt allerdings $g(0) \cdot g(3) = -9 \neq 0$ und somit $f_1 + f_2 \notin U$. Daher ist U kein Untervektorraum.
e)	F	Offenbar gilt für $f(x) = 0$ und $g(x) = -1$ die Ungleichung $0 = \|f(x)\| \leq \|g(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als konstante Funktionen stetig. Auf dem Interval $[0, 1]$ gilt jedoch $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \geq -1 = \int_0^1 g(x)\,dx$.