Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis) **Aachen, den 25.02.2014**
Prof. Dr. Holger Rauhut

Klausur zur Höheren Mathematik III

Wintersemester 2013/14

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.4) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die dafür vorgesehenen Seiten des Antwortbogens. Wenn Sie mehr Papier benötigen, melden Sie sich bitte. Für Notizen nutzen Sie bitte eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(12 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{20}(10 + 16x - x^2 - x^3)$.

a) Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $[0, 2]$ monoton steigt. Nutzen Sie dies, um zu begründen, dass für $x \in [0, 2]$ auch $f(x) \in [0, 2]$ gilt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass f auf dem Intervall $[0, 2]$ genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe I.2: **(9 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Minimum annimmt sowie die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Maximum annimmt.

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = xyz$. Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange das Minimum sowie das Maximum von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Begründen Sie dazu zunächst, dass es ein solches Minimum bzw. Maximum gibt.

Aufgabe I.4: **(9 Pkt.)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Teil II

Aufgabe II.1: **(9 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Vektorfelder jeweils, ob eine Stammfunktion existiert. Wenn eine Stammfunktion existiert, geben Sie eine solche an.

a) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v(x, y) = (x + y^2, y + x^2)^T$

b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x, y, z) = (e^y \cos(x), e^y \sin(x) + z^2, 2yz)^T$

Aufgabe II.2: **(10 Pkt.)**

Gegeben sei der Körper $V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4z^2,\ 0 \leq z \leq 3\}$. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_V (x + y + z)\ dx\ dy\ dz$.

Aufgabe II.3: **(14 Pkt.)**

Bestimmen Sie zu den folgenden Anfangswertproblemen jeweils eine Lösung.

a) $y' = \frac{x}{y},\ y(0) = 1$

b) $y' - \sin(x) \cdot y = xe^{-\cos(x)},\ y(0) = -1$

c) $y' + 3x \cdot y = 3e^{-x^2} \cdot y^{\frac{1}{3}},\ y(0) = 1$

Aufgabe II.4: **(7 Pkt.)**

Geben Sie zu den folgenden linearen Differentialgleichungen jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen an.

a) $y'' + 3y' - 4y = 0$

b) $y''' + 6y'' + 9y' = 0$

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Gilt $\operatorname{rot} v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, so besitzt v eine Stammfunktion.

(A2) Falls v eine Stammfunktion besitzt, so gilt $\operatorname{rot} v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(A3) Sind zwei der drei Komponenten v_1, v_2, v_3 von v konstant gleich 0, so gilt stets, dass v eine Stammfunktion besitzt.

b) Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist $B \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r > 0$, so gilt stets $\displaystyle\int_B v \cdot do = 0$.

(A2) Ist $B \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r > 0$, so gilt stets $\displaystyle\int_B \operatorname{rot} v \cdot do = 0$.

(A3) Ist $K \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel um den Ursprung mit Radius $r > 0$, und gilt $v(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2$, so gilt stets $\displaystyle\int_K \operatorname{div} v(x, y, z)\; dx\; dy\; dz = 0$.

c) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt[7]{y^2}$.

(A2) Es gibt eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $y' = \sqrt[7]{y^2},\quad y(0) = 1$ auf dem offenen Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat.

(A3) Es gibt eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $y' = \sqrt[7]{y^2},\quad y(1) = 0$ auf dem offenen Intervall $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat.

d) Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und es gelte $\alpha(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist y eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $y' + \alpha(x)y = 0$, so gilt stets $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A2) Ist y eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $y' + \alpha(x)y = 0$, so gilt stets $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

(A3) Sind y_1 und y_2 zwei auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen der Differentialgleichung $y' + \alpha(x)y = 0$, so gibt es zwei reelle Konstanten C_1, C_2, welche nicht beide gleich 0 sind, so dass gilt $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.