Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 06.02.2014

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik III

Wintersemester 2013/14

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.4) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(10 Pkt.)**
Gegeben sei $D = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (\frac{1}{6}(\sin x + \cos y + 2x + y), \frac{1}{5}(\sin y + \cos x - x - y))^T$$

a) Zeigen Sie, dass $f(D) \subset D$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine Konstante $\lambda < 1$, so dass gilt

$$||f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)||_\infty \le \lambda ||(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T||_\infty$$

für alle $(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \in D$, und begründen Sie, dass f auf D genau einen Fixpunkt hat.

Aufgabe I.2: **(10 Pkt.)**
Bestimmen Sie das maximale Volumen, das ein Quader mit einer Oberfläche von 54 Quadratzentimetern haben kann.

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**
Gegeben seien der Zylinder $Z = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 4\}$ sowie das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x,y,z) = (\frac{y}{x^2+y^2+2},\ \frac{-x}{x^2+y^2+2},\ z)^T.$$

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_Z \operatorname{div}(v)\ dx\ dy\ dz$.

Aufgabe I.4: **(10 Pkt.)**
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch einen Potenzreihenansatz.

$$y' - y = e^x - 1,\ y(0) = 1$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(10 Pkt.)**

Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$v(x,y,z) = (\frac{y}{\cosh^2(x)} + e^x,\ \tanh(x) + e^y, z)^T.$$

Außerdem sei die Kurve $C : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$C(t) = (\sin(t) + \cos(t) - 1,\ -\frac{1}{2}(2\cos(t) - 2),\ \sin(t)\cos(t))^T.$$

a) Prüfen Sie, ob eine Stammfunktion von v existiert. Wenn ja, bestimmen Sie eine solche.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_C v\ dt$.

Aufgabe II.2: **(8 Pkt.)**

Es seien a, b positive reelle Zahlen. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(r,\varphi) = (ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi))$ (Ellipsenkoordinaten).

a) Bestimmen Sie alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f nicht regulär ist (d.h. in denen die Jacobimatrix nicht invertierbar ist).

b) Es sei $p = (1, \frac{\pi}{2})^T$. Bestimmen Sie die Jacobimatrix von $f_{|U}^{-1}$ im Punkt $f(p)$. (Dabei ist U eine geeignete Umgebung von p, so dass die eingeschränkte Funktion $f_{|U} : U \to f(U)$ eine differenzierbare Umkehrabbildung $f_{|U}^{-1}$ besitzt.)

Aufgabe II.3: **(14 Pkt.)**

Bestimmen Sie zu den folgenden Anfangswertproblemen jeweils eine Lösung.

a) $y' = 1 + y^2,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1.$

b) $y' + y = \cos(x),\ y(0) = \frac{1}{2}$

c) $y' - (8x^2 + 2x)y + 4xy^2 = -4x^3 - 2x^2 + 1,\ y(0) = 1$ (Hinweis: Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist durch $y_s(x) = x$ gegeben.)

Aufgabe II.4: **(8 Pkt.)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes (aber nicht unbedingt beschränktes) Intervall. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(I) \subseteq I$. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist I kompakt, und gilt $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in I$, so besitzt f genau einen Fixpunkt auf I.

(A2) Gilt $|f'(x)| > 1$ für alle $x \in I$, so besitzt f keinen Fixpunkt auf I.

(A3) Besitzt f zwei Fixpunkte auf I, so gibt es ein $x \in I$ mit $|f'(x)| = 1$.

b) Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein dreimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es gilt stets $\nabla \times (\nabla v) = 0$

(A2) Es gibt stets ein Vektorfeld $\tilde{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass $\nabla \times \tilde{v} = v$ gilt.

(A3) Wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = v$ gibt, so gilt stets $\nabla \cdot v = 0$.

c) Es seien a_0, a_1, a_2 reelle Zahlen. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Die Differentialgleichung $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ besitzt stets ein Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ für eine geeignete reelle Zahl λ.

(A2) Jede Lösung der Differentialgleichung $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ist von der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ für eine geeignete reelle Zahl λ.

(A3) Zu gegebenen reellen Zahlen x_0, y_0 gibt es stets eine eindeutig bestimmte Lösung y der Differentialgleichung $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ mit $y(x_0) = y_0$.

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle $n \times n$ -Matrix. Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Ist A diagonalisierbar, so ist auch e^A diagonalisierbar.

(A2) Die Matrix e^A ist stets diagonalisierbar.

(A3) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn e^A invertierbar ist.