Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 29.07.2014

Klausur zur Höheren Mathematik III

SoSe 2014

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 10 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil Ihr eigenes Papier.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen.**

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
(1) $2 \cdot 3 = 6$
(2) $1 + 1 = 3$.

Antwort	(1)	(2)	Punkte
1.	W	W	0
2.	**W**	**F**	**2**
3.	F	W	0
4.	F	F	0

Antwort	(1)	(2)	Punkte
5.	F	-	0
6.	W	-	0
7.	-	F	0
8.	-	W	0

Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen! Bitte geben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu diesem Teil an.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(8+4 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{24}(12 - 20x - \sin(x^2))$.

a) Zeigen Sie, dass f in dem Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle bestitzt. Formen Sie dafür das gegebene Problem in ein Fixpunktproblem um und benutzen Sie den Fixpunktsatz von Banach.

b) Bestimmen Sie eine Mindestanzahl von Iterationsschritten, für die mit Hilfe der a priori-Abschätzung für die Fixpunktiteration eine Genauigkeit von 10^{-4} garantiert wird, wenn Sie als Startwert $x_0 = 0$ wählen.
Hinweis: $6^4 = 1296$.

Aufgabe I.2: **(4+1+7 Pkt.)**

Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion e^{xA}.

b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $y'(x) = Ay(x)$.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = Ay(x) + b, \; y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe I.3: **(6+10 Pkt.)**

Gegeben sei die Fläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}.$$

Dabei sei F so orientiert, dass der Normalenvektor an F im Punkt $(0, 0, 0)$ eine positive z-Komponente besitzt. Weiterhin sei das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{\partial F} v \cdot ds$

a) direkt,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Teil II

Aufgabe II.1: **(4+2 Pkt.)**

Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x, y, z) = (4x + yz + 3z^2,\ xz + 1,\ xy + 6xz)^T$$

sowie die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = (t \sin^3(t),\ 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t),\ t(\cos(t) + 1))^T.$$

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $\Phi(x, y, z)$ von v.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_\gamma v \cdot ds$.

Aufgabe II.2: **(2+6 Pkt.)**

Gegeben sei der Körper

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le 3,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

a) Skizzieren Sie K.

b) Bestimmen Sie das Volumen von K.

Aufgabe II.3: **(3+6+4 Pkt.)**

a) Lösen Sie die DGL $y'(x) - \frac{2}{x^2} y(x) = 2x^2 e^{-\frac{2}{x}},\ x \neq 0$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) + \sin(x)y(x) = e^{\frac{1}{2}\cos(x)} y^{\frac{1}{2}}(x),\ y(2\pi) = 0$.

c) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $y^{(4)}(x) + y'''(x) + 4y''(x) + 4y'(x) = 0$.

Aufgabe II.4: **(5+3+5 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (\pi, \frac{\pi}{2})$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(y)\cos(x)$.

b) Bestimmen Sie die Menge M aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (\sin(x), x + 2y)$ lokal invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2 - x^2 - \frac{1}{2}y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x + y - 2$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(5+5+5+5 Pkt.)**

a) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ sei lokal um den Punkt (x_0, y_0) nach y auflösbar. Dann muss gelten: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

(A2) Sei $f : A \times B \to \mathbb{R}^2,\ A, B \subseteq \mathbb{R}$ offen, eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit $f(x, y) = (g(y), h(x))$. Ist $g(y)$ streng monoton steigend auf B und $h(x)$ streng monoton fallend auf A, so ist f überall lokal invertierbar.

(A3) Sei $f : A \to A,\ A \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit existierender Umkehrfunktion $f^{-1} : A \to A$. Dann gilt stets $Df^{-1}(x, y) = (Df(x, y))^{-1}\ \forall (x, y) \in A$.

b) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene, zusammenhängende Menge und $D \subset B$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand ∂D, der aus endlich vielen geschlossenen Kurven besteht. Dann gilt für den Flächeninhalt $F(D)$ von D: $F(D) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial D} \binom{-y}{x} \cdot ds$.

(A2) Für zwei Flächen S_1 und S_2 mit dem gleichen orientierten Rand $\partial S_1 = \partial S_2$ und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt stets: $\int\limits_{S_1} v \cdot do = \int\limits_{S_2} v \cdot do$.

(A3) Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein konstantes Vektorfeld, also $v(x, y, z) = c,\ c \in \mathbb{R}^3, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es seien K eine Kugel mit Radius $r = 2$ und W ein Würfel mit Kantenlänge $a = 4$ jeweils mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Dann gilt: $\int\limits_{\partial K} v \cdot do = \int\limits_{\partial W} v \cdot do$.

c) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Gegeben sei die homogene Differentialgleichung $y'''(x) + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dann existiert immer ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = e^{\lambda x}$ Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

(A2) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $det(e^{xA}) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(A3) Es existiert mindestens eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass das zugehörige Differentialgleichungssystem $y'(x) = Ay(x)$ kein reelles Fundamentalsystem besitzt.

d) Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

(A1) Sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to D$ eine Abbildung mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|\ \forall x, y \in D$ mit $x \neq y$. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

(A2) Sei $f : D \to D$ eine differenzierbare Abbildung mit Fixpunkt x^*. Dann gilt: $|f'(x^*)| < 1$.

(A3) Für jede Norm $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt: Aus $||x|| = 0$ folgt $x = 0$.