Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 01.03.2016

Klausur zur Höheren Mathematik III

WS 2015/16

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(9 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{6}{7}\cos(\frac{\pi}{6}\sin(x))$.

a) Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $\lambda = \frac{1}{4}$ ist. Zeigen Sie weiterhin, dass f einen eindeutigen Fixpunkt x^* in $[0, \pi]$ besitzt.

b) Sei $x_0 = \pi$. Wie viele Fixpunktiterationen sind ausreichend, um eine Genauigkeit $|x_n - x^*| \leq \frac{1}{256}$ zu erreichen?

Aufgabe I.2: **(12 Pkt.)**

Es sei $M := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid xy + \frac{1}{2}z^2 - 4 = 0\}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange den Punkt $(x^*, y^*, z^*)^T \in M$ mit minimalem Abstand zum Punkt $(1, 1, 0)^T$ und berechnen Sie den Abstand. Sie dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass der Punkt $(x^*, y^*, z^*)^T \in M$ existiert.

Aufgabe I.3: **(3+5+11 Pkt.)**

Gegeben seien die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y, z) = 4x^2y + xyz - 3xz - z^3,$$

die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (t\sin(t)^2,\ \cos(4t) + \sin(4t),\ t(2t - 4\pi))^T$$

und das Gebiet

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2,\ 1 \leq y \leq 3,\ x^2 - 2x + \frac{(z-2)^2}{9} \leq 0\}.$$

a) Bestimmen Sie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass Φ eine Stammfunktion von v ist.

b) Bestimmen Sie $\int\limits_{\gamma} v \cdot ds$.

c) Bestimmen Sie mit dem Satz von Gauss den Fluss $\int\limits_{\partial K} v \cdot do$, wobei der Normaleneinheitsvektor nach außen zeigt.

Teil II

Aufgabe II.1: **(3+7 Pkt.)**

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \sin(x)e^y + zy^2$. Bestimmen Sie die Ableitung von f im Punkt $w = (\pi, 2, 1)^T$ in Richtung $e^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_{2,a}(x, y)$ bezüglich des Entwicklungspunktes a:

$$f(x, y) = x^2 \ln(xy), \qquad a = (1, 1)^T.$$

Aufgabe II.2: **(4+7+4+5 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL

$$y'''(x) - y''(x) + 3y'(x) + 5y(x) = 0.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) - 5xy(x) = 5e^{-\frac{5}{2}x^2}y^2(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y(x).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.3: **(4+6 Pkt.)**

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^2 + \sin(xy)$. Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \pi, f(\frac{1}{2}, \pi))^T$ einen Normalenvektor an den Graphen der Funktion.

b) Gegeben sei die geschlossene Kurve $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ durch

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}, \ t \in [0,1]; \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in [0,2]; \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 5-t \\ 2-\frac{1}{5}t \end{pmatrix}, \ t \in [0,5].$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F(G)$ des von γ eingeschlossenen Gebiets G.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

a) Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $F_i(x) \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt stets $\int_\gamma F \cdot ds \geq 0$.

b) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so nimmt f stets ein Maximum auf D an.

c) $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = y\ln(y) - x^2 = 0$ ist eindeutig nach y auflösbar.

d) Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

e) Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und ∂G die Randfläche einer Kugel im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\int_{\partial G} \operatorname{rot}(v) \cdot do = 0.$$