Name: MaschBau .... **Matr.-Nr.:** .... **Variante:** A

Antwortbogen
Teil I

Aufgabe I.1

a) Es gilt $\sin([0,\pi]) = [0,1]$, also $\frac{\pi}{6}\sin([0,\pi]) = [0,\frac{\pi}{6}] \subseteq [0,\frac{\pi}{2}]$, und $\cos([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1]$, also $\frac{6}{7}\cos(\frac{\pi}{6}\sin(x)) \in [0,\frac{6}{7}] \subseteq [0,\pi]$ für alle $x \in [0,\pi]$. Somit ist f eine Selbstabbildung auf einer abgeschlossenen Menge. Weiter ist f stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = -\tfrac{6}{7}\sin(\tfrac{\pi}{6}\sin(x)) \cdot \tfrac{\pi}{6}\cos(x) \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Da sowohl $|\sin|$ und $|\cos|$ durch 1 beschränkt sind, als auch $\sin$ auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wächst, folgt

$$|f'(x)| = \tfrac{6}{7}|\sin(\tfrac{\pi}{6}\sin(x))| \cdot \tfrac{\pi}{6}|\cos(x)| \le \tfrac{\pi}{7}|\sin(\tfrac{\pi}{6}\cdot 1)| \cdot 1 = \tfrac{\pi}{7}\cdot\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{4} =: \lambda \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Entsprechend ist f eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $\lambda = \frac{1}{4} < 1$. Nach dem Fixpunktsatz von Banach besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in [0,\pi]$ und weiter gilt:

b)

$$|x_n - x^*| \le \tfrac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}|\tfrac{6}{7} - \pi| = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{|\frac{6}{7}-\pi|}{3} < \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \overset{!}{\le} \tfrac{1}{4}^4 = \tfrac{1}{256}.$$

Die gewünschte Genauigkeit wird somit für $n \ge 5$ erreicht.

Aufgabe I.2

Da $[0,\infty] \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \frac{1}{2}\alpha^2$ streng monoton wächst, hat die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}||(x-1, y-1, z)^T||^2$$

dieselben Extremstellen wie der Abstand $||(x,y,z)^T - (1,1,0)^T||$. Sowohl f als auch $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}z^2 - 4$ sind stetig partiell differenzierbar als Kompositionen stetig partiell differenzierbarer Funktionen mit $Df(x,y,z) = (x-1, y-1, z)$ und $Dg(x,y,z) = (y,x,z)$. Somit hat $Dg(x,y,z) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ vollen Rang $1 < 3$ für alle $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Da $g(0,0,0) = -4 \neq 0$, besagt daher der Satz von Lagrange, dass ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Lagrange-Funktion $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z)$ einen kritischen Punkt in $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)^T$ hat, d.h.

$$\begin{array}{lll}
\text{I. } 0 = \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = (x-1) + \lambda y & \Rightarrow & x = 1 - \lambda y \\
\text{II. } 0 = \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = (y-1) + \lambda x & \Rightarrow & y = 1 - \lambda x = 1 - \lambda(1-\lambda y \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 - 1)y = \lambda - 1 \\
 & \Rightarrow & \lambda = 1 \text{ oder } (\lambda+1)y = 1. \text{ Insbesondere } \lambda \neq -1. \\
\text{III. } 0 = \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = z + \lambda z & \underset{\lambda \neq -1}{\Rightarrow} & z = 0 \\
\text{IV. } 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = xy + \frac{1}{2}z^2 - 4 & \underset{z=0}{\Rightarrow} & xy = 4
\end{array}$$

---

1. Fall: $\lambda = 1$. Mit I. und IV. folgt $(1-y)y = 4$, also $(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} = 0$, ein Widerspruch.
2. Fall: $(\lambda+1)y = 1$. Mit I. folgt $x = 1 - \lambda\frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda+1} = y$ und IV. impliziert $x = y = 2$ oder $x = y = -2$.
Es gilt also $(x^*, y^*, z^*)^T \in \{(2,2,0)^T, (-2,-2,0)^T\}$ (Existenz nach Voraussetzung). Da

$$||(2,2,0)^T - (1,1,0)^T|| = \sqrt{2} < 3\sqrt{2} = ||(-2,-2,0)^T - (1,1,0)^T||,$$

folgt $(x^*, y^*, z^*)^T = (2,2,0)^T \in M$ ist der Punkt mit minimalem Abstand $\sqrt{2}$ zu $(1,1,0)^T$.

Aufgabe I.3

a) $v(x,y,z) = \nabla \phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8xy + yz - 3z \\ 4x^2 + xz \\ xy - 3x - 3z^2 \end{pmatrix}$

ϕ stetig part. differenzierbar

b) Da $v(x,y,z)$ ein Gradientenfeld ist ($v(x,y,z) = \nabla \phi(x,y,z)$) und γ eine geschlossene Kurve ist ($\gamma(0) = (0,1,0) = \gamma(2\pi)$), folgt automatisch $\int_\gamma v \cdot ds = \underbrace{\phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0))}_{=0}$

c) Nach dem Satz von Gauss gilt $\int_{\partial K} v \cdot do = \int_K \operatorname{div}(v)\, dx\,dy\,dz$, wobei

$\operatorname{div}(v) = 8y + 0 - 6z$ und

$K = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ 1 \leq y \leq 3,\ (x-1)^2 + \frac{(z-2)^2}{3^2} \leq 1 \}$

zur Beschreibung von K nutzen wir folgende Koordinatentransformation:

$$\phi(r,y,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + r\cos\varphi \\ y \\ 2 + 3r\sin\varphi \end{pmatrix},\ r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\pi],\ y \in [1,3]$$

$$\Rightarrow |\det D\phi(r,y,\varphi)| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\sin\varphi & 0 & 3r\cos\varphi \end{pmatrix}\right| = |3r\cos^2\varphi + 3r\sin^2\varphi| = 3r$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} v \cdot do = \int_K \operatorname{div}(v)\, dx\,dy\,dz = \int_K 8y - 6z\ dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_1^3 \int_0^\pi (8y - 12 - 18r\sin\varphi) \cdot 3r\ d\varphi\,dy\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_1^3 \int_0^\pi 24yr - 36r - 54r^2\sin\varphi\ d\varphi\,dy\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_1^3 24\pi yr - 36\pi r - 108r^2\ dy\,dr$$

$$= \int_0^1 12\pi r y^2 \Big|_{y=1}^3 - 72\pi r - 216r^2\ dr$$

$$= \int_0^1 96\pi r - 72\pi r - 216r^2\ dr$$

$$= \int_0^1 24\pi r - 72 \cdot 3r^2\ dr$$

$$= 12\pi r^2 \Big|_0^1 - 72r^3 \Big|_0^1 = 12\pi - 72$$

Teil II

Aufgabe II.1

a)

Lösungsskizze:

$$Df(x,y,z) = \left(\cos(x)\cdot e^{y},\ \sin(x)\cdot e^{y} + 2zy,\ y^2\right)$$

$$\Rightarrow Df(\pi,2,1) = (-e^2, 4, 4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e^*}(w) = Df(w)\cdot e^* = (-e^2,4,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{e^2}{\sqrt{3}}$$

Ergebnis:

$$\frac{e^2}{\sqrt{3}}$$

b)

Lösungsskizze:

$$Df(x,y) = \left(2x\ln(xy) + \frac{x^2}{xy}\cdot y,\ x^2\cdot\frac{1}{xy}\cdot x\right) = \left(2x\ln(xy)+x,\ \frac{x^2}{y}\right)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\ln(xy) + 2x\frac{1}{xy}\cdot y + 1 & \frac{2x}{y} \\ 2x\frac{1}{xy}\cdot x & -\frac{x^2}{y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln(xy)+3 & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$T_{2,(1,1)}(x,y) = f(1,1) + Df(1,1)\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y-1)\,Hf(1,1)\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$$

$$= 0 + (x-1,y-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y-1)\begin{pmatrix}3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$$

$$= 0 + (x-1) + (y-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + 2(x-1)(y-1)$$

Ergebnis:

$$0 + (x-1) + (y-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + 2(x-1)(y-1)$$

Aufgabe II.2

a)

Lösungsskizze:

$\rightsquigarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ Offensichtlich: $\lambda_1 = -1$ ist Nullstelle

$$\Rightarrow (\lambda^3-\lambda^2+3\lambda+5):(\lambda+1) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = (\lambda-1)^2 + 4$$

$\underline{-(\lambda^3+\lambda^2)}$

$-2\lambda^2+3\lambda$

$\underline{-(-2\lambda^2-2\lambda)}$

$5\lambda+5$

$\underline{-(5\lambda+5)}$

0

$\Rightarrow \lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$

reelles Fundamentalsystem:

$$\{e^{-x},\ e^{x}\cos(2x),\ e^{x}\sin(2x)\}$$

Ergebnis:

$$\{e^{-x},\ e^{x}\cos(2x),\ e^{x}\sin(2x)\}$$

b)

Lösungsskizze:

$y'(t) - 5t\,y(t) = 5e^{-\frac{5}{2}t^2}\,y^2(t)\,,\ y(0) = \frac{1}{2}$ Typ Bernoulli

$z(t) = y^{1-2}(t) = y^{-1}(t) \rightsquigarrow$ lin. DGL $z'(t) + 5t\,z(t) = (-1)\,5e^{-\frac{5}{2}t^2}$

$z_{hom}(t) = c \cdot e^{\int -5t\,dt} = c \cdot e^{-\frac{5}{2}t^2}\,,\ c \in \mathbb{R}$

$z_{part}(t) = e^{-\frac{5}{2}t^2} \cdot \int e^{\frac{5}{2}t^2} \cdot (-5) \cdot e^{-\frac{5}{2}t^2}\,dt = -5t \cdot e^{-\frac{5}{2}t^2}$

$\Rightarrow z(t) = (c - 5t) \cdot e^{-\frac{5}{2}t^2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{c-5t} \cdot e^{\frac{5}{2}t^2}$

$y(0) = \frac{1}{c} \cdot e^0 = \frac{1}{c} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2-5t}\,e^{\frac{5}{2}t^2}$

Ergebnis:

$y(t) = \frac{1}{2-5t}\,e^{\frac{5}{2}t^2}$

c)

Lösungsskizze:

$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

EV zu $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ HV 2. Stufe $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right],\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ergebnis:

$y(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right],$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

d)

Lösungsskizze:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$ mit $B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C \cdot B$

$e^{tA} = e^{tB} \cdot e^{tC}$

$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot I$

zu e^{tC}: $C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{tC} = I + t \cdot C + \frac{1}{2}t^2 C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2t & 4t - 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{tA} = e^{tB} \cdot e^{tC} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -2t & 4t - 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

$e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -2t & 4t - 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe II.3

a)

Lösungsskizze:

Parametrisierung $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy^2 + \sin(xy) \end{pmatrix}, \; x,y \in \mathbb{R}$

Normalenvektor an Fläche

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y^2 + y\cos(xy) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2xy + x\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y^2 - y\cos(xy) \\ -2xy - x\cos(xy) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -\pi^2 - 0 \\ -\pi - 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

alternativ: $\begin{pmatrix} \pi^2 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

$$\pm \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

Lösungsskizze:

Formel für den Flächeninhalt aus dem Satz von Green:

$$F(G) = \frac{1}{2}\int_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 t \cdot 2(t-1) - (t-1)^2 \cdot 1 \, dt$$

$$+ \int_0^2 (1+t^2) \cdot 1 - t \cdot 2t \, dt$$

$$+ \int_0^5 (5-t)\left(-\tfrac{1}{5}\right) - \left(2 - \tfrac{1}{5}t\right) \cdot (-1) \, dt \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\int_0^1 t^2 - 1 \, dt + \int_0^2 1 - t^2 \, dt + \int_0^5 1 \, dt \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\left(\tfrac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_0^1 + \left(t - \tfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^2 + t\Big|_0^5 \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[-\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \Big] = \frac{11}{6}$$

Ergebnis:

$$\frac{11}{6}$$

A

Teil III

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

Aufgabe III.1

a)	**F**	$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (-t,-t)^T$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x,y) = (1,1)^T$ sind stetig partiell differenzierbar und $F_1(x,y) = F_2(x,y) = 1 > 0\ \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, aber es gilt $$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \langle (1,1)^T, (-1,-1)^T \rangle\, dt = -2 < 0.$$
b)	**F**	$D = [0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlosssen und $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{x}$ ist stetig und beschränkt, da $-1 \leq f(x) < 0\ \forall x \in D$. Angenommen f nimmt in $x^* \in D$ sein Maximum an, dann gilt $$f(2x^*) = \tfrac{1}{2} f(x^*) \underset{f(x^*)<0}{>} f(x^*),$$ ein Widerspruch zur Maximalität von $f(x^*)$
c)	**W**	Da $\phi : [1,\infty) \to [0,\infty), \phi(y) = y\ln(y)$ stetig differenzierbar, mit $\phi'(y) = \ln(y) + 1 > 0\ \forall y \in [1,\infty)$, also streng monoton steigend mit Bildbereich $[0,\infty)$ ist, besitzt die Gleichung $y\ln(y) = x^2$ genau eine Lösung $y = g(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
d)	**F**	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist stetig partiell differenzierbar. Angenommen f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$, d.h. $\lvert f(x) - f(y)\rvert \leq L \cdot \lvert x-y\rvert\ \forall x,y \in \mathbb{R}$. Wähle $x = L$ und $y = 1$, dann folgt $\lvert f(x) - f(y)\rvert = \lvert x^2 - y^2\rvert = \lvert x+y\rvert \cdot \lvert x-y\rvert = (L+1) \cdot \lvert x-y\rvert > L \cdot \lvert x-y\rvert$, ein Widerspruch.
e)	**W**	Zerteilen wir die Kugeloberfläche ∂G in die obere Halbkugeloberfläche O und die untere Halbkugeloberfläche U, so gilt $\int_{\partial G} \mathrm{rot}(v) \cdot do = \int_O \mathrm{rot}(v) \cdot do + \int_U \mathrm{rot}(v) \cdot do$. Mit dem Satz von Stokes folgt $\int_O \mathrm{rot}(v) \cdot do = \int_{\partial O} v \cdot ds$ und $\int_U \mathrm{rot}(v) \cdot do = \int_{\partial U} v \cdot ds = -\int_{\partial O} v \cdot ds$, da der Rand von O und U bis auf die Orientierung identisch ist. Es folgt $\int_{\partial G} \mathrm{rot}(v) \cdot do = 0$