Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 11.02.2016

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik III

Wintersemester 2015/16

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 2 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.4) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. (Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.) Für die richtige Antwort gibt es pro Frage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(4+3 Pkt.)**

Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt in $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

b) Sei $x_0 = 0$. Wie viele Fixpunktiterationen sind ausreichend, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{1}{256}$ sicherzustellen?

Aufgabe I.2: **(2+4+2+3 Pkt.)**

Wir wollen die Oberfläche (Mantel + Deckel + Boden) eines Zylinders (Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$) minimieren unter der Bedingung, dass der Zylinder das Volumen $V > 0$ besitzt.

1) Schreiben Sie dieses Problem in der Form eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen.

2) Zeigen Sie, dass das Problem mindestens ein Minimum besitzt.

3) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

4) Was ist die minimale Oberfläche abhängig von V?

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**

Lösen Sie mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung folgendes Anfangswertproblem.

$$\dot{x}(t) = (t-2)x(t) + t - 2, \qquad \text{mit } x\left(\sqrt{2\ln(2)} + 2\right) = 3.$$

Aufgabe I.4: **(5+7 Pkt.)**

Gegeben sei die Fläche

$$F = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4z, z \geq 3\}.$$

Dabei sei F so orientiert, dass der Normalenvektor an F im Punkt $(0, 0, 4)^T$ eine positive z-Komponente besitzt.
Weiterhin sei das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{\partial F} v \cdot ds$

a) direkt,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei folgendes Anfangswertproblem:

$$y^{(4)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y(t) = b(t), \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = -1, y'''(0) = 9.$$

1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sowie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

2) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $b(t) = 12t + t^3$. Sie können verwenden, dass $y(t) = t^3$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2}$ sowie $\mathbf{x_0} = (1, 2)^T$.

1) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $\mathbf{x_0}$.

2) Bestimmen Sie alle lokalen und alle globalen Extremswerte der Funktion f.

Aufgabe II.3: **(8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Vektorfelder jeweils, ob eine Stammfunktion existiert.
Wenn eine Stammfunktion existiert, geben Sie eine solche an.

a) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v(x, y) = (x + y^2 + y, 2yx + x^2)^T$

b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x, y, z) = (2xy + \cos(z), 2\sin(y)\cos(y) + x^2, -x\sin(z))^T$

Aufgabe II.4: **(6+6 Pkt.)**

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'(t) = 2t + 3ty(t) + ty(t)^2.$$

Hinweis: Verifizieren Sie, dass $y_p(t) = -1$ eine partikuläre Lösung ist.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} - \sqrt{y(x)} = 0, \quad y(9) = 9.$$

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $\mathbf{x}_0 \in D$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Es gelte $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ und die Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ habe die Eigenwerte 0 und 1. Dann gilt stets: f hat in $\mathbf{x}_0$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

b) Es sei D ein regulärer Bereich im $\mathbb{R}^3$, dessen Inneres nicht leer sei. Weiter sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{div} v(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, und es sei $\operatorname{div} v(\mathbf{x_0}) \neq 0$ für einen Punkt $\mathbf{x_0}$ im Inneren von D. Dann gilt stets $\int_{\partial D} v \cdot do \neq 0$.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq K < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h., f ist eine Kontraktion). Dann gilt stets: f besitzt höchstens einen Fixpunkt.

d) Die Menge aller Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < x < 1$ und $y = 0$ bildet eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

e) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}$, so hat die Differentialgleichung $y^{(2n+1)} + a_{2n} y^{(2n)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$ stets eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ für eine geeignete reelle Zahl λ_0. (Dabei bezeichnet $y^{(k)}$ die k-te Ableitung von y.)