Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut **Aachen, den 11.02.2016**

Trainingsklausur zur Höheren Mathematik III

Wintersemester 2015/16

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal 2 DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.4) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. (Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen.) Für die richtige Antwort gibt es pro Frage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(4+3 Pkt.)**

Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt in $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

b) Sei $x_0 = 0$. Wie viele Fixpunktiterationen sind ausreichend, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{1}{256}$ sicherzustellen?

Wir wollen den Fixpunktsatz von Banach anwenden. $D = [0, \pi/2]$ ist eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$. Auf D ist f monoton wachsend (da $\sin$ dort monoton wachsend ist) und daraus folgt, dass $1 = f(0) \leq f(x) \leq f(\pi/2) = 3/2 < \pi/2$ für alle $x \in D$. Also $f(D) \subset D$. Nun zeigen wir, dass f eine Kontraktion ist. Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt

$$|f'(x)| = |0.5\cos(x)| \leq 0.5 < 1.$$

Daraus folgt, dass f eine Kontraktion mit Konstante $\lambda = 0.5$ ist. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt, dass f einen eindeutigen Fixpunkt in D hat.
Diesen Fixpunkt x_* kann man mit Hilfe von Fixpunktiterationen berechnen: $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \geq 0$.
Es gilt die a-priori Abschätzung:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

Es gilt $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Wir können $\lambda = 1/2$ wählen. Also

$$|x_n - x_*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Es genügt also, n so groß zu wählen, dass $1/256 \geq (\frac{1}{2})^{n-1}$, also $n \geq 9$. Nach 9 Iterationen ist also die gewünschte Genauigkeit erreicht.

Aufgabe I.2: **(2+4+2+3 Pkt.)**

Wir wollen die Oberfläche (Mantel + Deckel + Boden) eines Zylinders (Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$) minimieren unter der Bedingung, dass der Zylinder das Volumen $V > 0$ besitzt.

1) Schreiben Sie dieses Problem in der Form eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen.

2) Zeigen Sie, dass das Problem mindestens ein Minimum besitzt.

3) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

4) Was ist die minimale Oberfläche abhängig von V?

Die Oberfläche eines Zylinder mit Radius r und Höhe h ist $F(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Das Volumen ist $V(r,h) = \pi r^2 h$. Gesucht sind $r, h > 0$, die folgendes Problem lösen:

$$\begin{cases} \text{min} & F(r,h) \\ \text{unter NB} & V(r,h) - V = 0 \end{cases}$$

Wir begründen, dass es eine Lösung gibt. Wähle $r_0, h_0 > 0$ so dass $V(r_0, h_0) = V$. Sei $A = F(r_0, h_0)$. Sei $a = \sqrt{A/2\pi}$. Also gilt: Wenn $r > a$ und $h > 0$ dann ist $F(r,h) > A$. Ebenso: Wenn $h < \frac{V}{\pi \cdot a^2}$ und $V(r,h) = V$ dann folgt $r > a$ und damit $F(r,h) > A$. Aus $V(r,h) = V$ folgt $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$, also $F(r,h) \geq 2\pi\sqrt{Vh/\pi}$. Also wird $F(r,h)$ größer als A, wenn h groß genug ist oder wenn r klein genug wird (und $V(r,h) = V$). Insgesamt folgt, dass es positive Zahlen $x < X$ und $y < Y$ gibt, so dass für

$V(r,h) = V$ und $(r,h) \notin [x,X] \times [y,Y]$ (aber $r,h > 0$) gilt, dass $F(r,h) > A$. Aber die Menge aller (r,h) mit $V(r,h) = V$ und $(r,h) \in [x,X] \times [y,Y]$ ist kompakt, also nimmt die stetige Funktion F auf dieser Menge ein Minimum an. Insgesamt folgt, dass es das gesuchte Minimum gibt.
Die assoziierte Lagrangefunktion lautet, für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(r,h,\lambda) = F(r,h) + \lambda(V(r,h) - V).$$

Zur Bestimmung des gesuchten Minimums bestimmen wir die kritischen Punkte der Lagrangefunktion (wir wissen ja schon, dass es ein Minimum gibt). Der Gradient von $g(r,h) := V(r,h) - V$ an der Stelle $(r,h)^T$ lautet $\nabla g(r,h) = \begin{pmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{pmatrix}$. Für r und h beide ungleich 0 hat dieser Gradient vollen Rang, da er dann nicht 0 ist. Wir können also die Methode von Lagrange verwenden. Wir setzen die partiellen Ableitungen von $\mathcal{L}$ gleich 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}(r,h,\lambda) &= 2\pi h + 4\pi r + 2\lambda \pi r h = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(r,h,\lambda) &= 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(r,h,\lambda) &= \pi r^2 h - V = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
h &= \frac{V}{\pi r^2} \\
\lambda &= -\frac{2}{r} \\
0 &= \frac{2V}{r^2} + 4\pi r - \frac{4V}{r^2}.
\end{aligned}$$

Umformung der letzten Gleichung liefert $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$. Wenn man wieder in h einsetzt, gilt $h = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} = 2r$. Also lautet die minimale Oberfläche $6\pi(\frac{V}{2\pi})^{2/3}$.

Aufgabe I.3: **(10 Pkt.)**

Lösen Sie mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung folgendes Anfangswertproblem.

$$\dot{x}(t) = (t-2)x(t) + t - 2, \qquad \text{mit } x\left(\sqrt{2\ln(2)} + 2\right) = 3.$$

Wir nehmen an, $x(t) = \sum_{k\geq 0} a_k (t-2)^k$ (Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $t_0 = 2$). Es folgt

$$\begin{aligned}
(t-2)x(t) = (t-2)\sum_{k\geq 0} a_k (t-2)^k &= \sum_{k\geq 0} a_k (t-2)^{k+1} = \sum_{k\geq 1} a_{k-1}(t-2)^k \\
\dot{x}(t) = \sum_{k\geq 1} k a_k (t-2)^{k-1} &= \sum_{k\geq 0} (k+1) a_{k+1} (t-2)^k = a_1 + \sum_{k\geq 1} (k+1) a_{k+1} (t-2)^k.
\end{aligned}$$

Mit der Differentialgleichung erhält man

$$a_1 + (t-2)(-a_0 - 1 + 2a_2) + \sum_{k\geq 2} \left((k+1)a_{k+1} - a_{k-1}\right)(t-2)^k = 0.$$

Das heißt $a_1 = 0$, für $k = 1$ ist $(k+1)a_{k+1} - a_{k-1} - 1 = 0$ und für alle $k \geq 2$ gilt $(k+1)a_{k+1} - a_{k-1} = 0$. Die ersten Terme ergeben:

$$\begin{aligned}
&k = 0: && a_1 = 0 && \\
&k = 1: && 2a_2 - 1 - a_0 = 0 && \Rightarrow a_2 = \frac{1 + a_0}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k = 2: &\qquad 3a_3 - a_1 = 0 &\qquad \Rightarrow a_3 = 0\\
k = 3: &\qquad 4a_4 - a_2 = 0 &\qquad \Rightarrow a_4 = a_2/4 = \frac{1+a_0}{2^2.2}\\
k = 4: &\qquad 5a_5 - a_3 = 0 &\qquad \Rightarrow a_5 = 0\\
k = 5: &\qquad 6a_6 - a_4 = 0 &\qquad \Rightarrow a_6 = a_4/6 = \frac{1+a_0}{2^3 3!}.
\end{aligned}
$$

Wir beweisen jetzt mit Hilfe einer vollständigen Induktion die zwei folgenden Behauptungen:

$$
\forall k \geq 0, a_{2k+1} = 0
$$
$$
\forall k \geq 1, a_{2k} = \frac{1+a_0}{2^k k!}.
$$

Die Induktionsanfang wurde schon bewiesen (bis $k = 2$). Sei $k > 0$ so dass die Behauptungen gelten. Der nächste ungerade Koeffizient erfüllt $(2(k+1)+1)a_{2(k+1)+1} - a_{2k+1} = 0$ mit $a_{2k+1} = 0$ (Induktionshypothese). Daraus folgt, dass $a_{2(k+1)+1} = 0$ und damit haben wir die erste Behauptung bewiesen. Den nächsten geraden Koeffizient betrachtet man gleich. Er erfüllt $(2(k+1))a_{2(k+1)} - a_{2k} = 0$ mit $a_{2k} = \frac{1+a_0}{2^k k!}$. Also $a_{2(k+1)} = a_{2k}/2(k+1) = \frac{1+a_0}{2^k k! 2(k+1)} = \frac{1+a_0}{2^{(k+1)}(k+1)!}$ und damit ist die zweite Behauptung (für $k \geq 1$) bewiesen.
Insgesamt gilt, dass

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k\geq 0} a_k (t-2)^k = \sum_{k\geq 0} a_{2k}(t-2)^{2k} = a_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{a_0+1}{2^k k!}(t-2)^{2k}\\
&= a_0 + (a_0+1)\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{(t-2)^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!} - 1\right) = (a_0+1)e^{\frac{(t-2)^2}{2}} - 1
\end{aligned}
$$

Mit der Anfangsbedingung erhält man $x(\sqrt{2\ln(2)}+2) = (a_0+1)e^{\frac{2\ln(2)}{2}} - 1 = 3 \Leftrightarrow a_0 = 1$. Daraus folgt, dass die Lösung zu dem oben gegebenen Anfangswertproblem gegeben ist durch

$$
x(t) = 2e^{\frac{(t-2)^2}{2}} - 1.
$$

Aufgabe I.4: **(5+7 Pkt.)**

Gegeben sei die Fläche

$$
F = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4z, z \geq 3\}.
$$

Dabei sei F so orientiert, dass der Normalenvektor an F im Punkt $(0,0,4)^T$ eine positive z-Komponente besitzt.
Weiterhin sei das Vektorfeld

$$
v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\\ z\\ x \end{pmatrix}
$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{\partial F} v \cdot ds$

a) direkt,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

a) Die Gleichung $x^2+y^2+z^2 = 4z \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ beschreibt eine Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,2)^T$. Der Rand ∂F von F lautet

$$
\partial F = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-2)^2 = 4, z = 3\right\} = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 3, z = 3\right\}.
$$

Da der Normalenvektor im Punkt $(0,0,4)^T$ eine positive z-Komponente besitzen soll, orientieren wir die Randkurve positiv und nutzen dazu die folgende Parametrisierung:

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\varphi \\ \sqrt{3}\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Also

$$\int\limits_{\partial F} v \cdot ds = \int_0^{2\pi} v(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\varphi \\ 3 \\ \sqrt{3}\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin\varphi \\ \sqrt{3}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -3\sin^2\varphi + 3\sqrt{3}\cos\varphi d\varphi.$$

Offenbar ist $\int_0^{2\pi} 3\sqrt{3}\cos\varphi d\varphi = [3\sqrt{3}\sin\varphi]_0^{2\pi} = 0$. Die Ableitung der Funktion $\varphi \mapsto \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}$ ist offenbar die Funktion $\varphi \mapsto \sin^2\varphi$. (Man findet diese Stammfunktion leicht durch partielle Integration). Also $\int_0^{2\pi} -3\sin^2\varphi d\varphi = -3[\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}]_0^{2\pi} = -3\pi$. Also insgesamt

$$\int\limits_{\partial F} v \cdot ds = -3\pi.$$

b) Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int\limits_{\partial F} v \cdot ds = \int\limits_{F} \mathrm{rot}\,(v) \cdot do.$$

Es gilt

$$\mathrm{rot}\,(v)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren die Fläche F durch

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\theta \\ 2\sin\varphi\cos\theta \\ 2 + 2\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $\arcsin\frac{3-2}{2} = \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Es ist

$$\Phi_\varphi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi\cos\theta \\ 2\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \Phi_\theta(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi\sin\theta \\ -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Also

$$\Phi_\varphi(\varphi,\theta) \times \Phi_\theta(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos^2\theta \\ 4\sin\varphi\cos^2\theta \\ 4\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = 4\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Es gilt $4\cos\theta \geq 0$ für $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Weiter hat der Vektor $\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ offenbar euklidische Norm 1 für alle φ, θ, und für $\theta = \pi/2$ (also für den Punkt $(0,0,4)^T$ in F) erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieser hat eine positive z-Komponente. Also gilt:

$$\int\limits_{\partial F} v \cdot ds = \int\limits_{F} \mathrm{rot}\,(v) \cdot do = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos^2\theta \\ 4\sin\varphi\cos^2\theta \\ 4\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} d\varphi d\theta = -4\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

Dieses Integral hat den Wert $-4\pi[\sin^2\theta]_{\pi/6}^{\pi/2} = -4\pi(1 - 1/4) = -3\pi$. Also erhalten wir erneut

$$\int\limits_{\partial F} v \cdot ds = -3\pi.$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei folgendes Anfangswertproblem:

$$y^{(4)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y(t) = b(t), \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = -1, y'''(0) = 9.$$

1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sowie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

2) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $b(t) = 12t + t^3$. Sie können verwenden, dass $y(t) = t^3$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2.$$

Das heißt, dass P zwei komplexe (konjugierte) Nullstellen der Vielfachheit 2 hat: $\lambda_1 = \mathbf{i} = \overline{\lambda_2}$. Aus dem Satz über die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung folgt, dass die Familie von Funktionen $\{\cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t)\}$ ein Fundamentalsystem ist. Daher kann man die allgemeine Lösung (der zugehörigen homogenen DGL) als Linearkombination der Funktionen des Fundamentalsystems schreiben, das heißt, es existieren reelle Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 so dass

$$y_h(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3 t\cos(t) + c_4 t\sin(t).$$

Wir verwenden, dass $y_p(t) = t^3$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und setzen für die Lösung y unseres Anfangswertproblems $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3 t\cos(t) + c_4 t\sin(t) + t^3$. Nach Berechnung den Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3 t\cos(t) + c_4 t\sin(t) + t^3\\
y'(t) &= (c_2 + c_3 + tc_4)\cos(t) + (c_4 - c_1 - tc_3)\sin(t) + 3t^2\\
y''(t) &= -\sin(t)(2c_3 + c_2 + tc_4) + \cos(t)(2c_4 - c_1 - c_3 t) + 6t\\
y'''(t) &= -\cos(t)(3c_3 + c_2 + tc_4) - \sin(t)(3c_4 - c_1 - c_3 t) + 6
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen den Nebenbedingungen folgt

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1\\
c_2 + c_3 &= -1\\
2c_4 - c_1 &= -1\\
-c_2 - 3c_3 + 6 &= 9.
\end{aligned}$$

Die erste und die dritte Gleichung liefern $c_1 = 1$ und $c_4 = 0$. Addiert man die zweite und die vierte Gleichung, erhält man $c_3 = -1$ und daraus mit der zweiten Gleichung $c_2 = 0$. Die Lösung lautet also $y(t) = (1 - t)\cos(t) + t^3$.

Aufgabe II.2: **(5+5 Pkt.)**

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2}$ sowie $\mathbf{x_0} = (1, 2)^T$.

1) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $\mathbf{x_0}$.

2) Bestimmen Sie alle lokalen und alle globalen Extremwerte der Funktion f.

1) Sei $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Die Funktion ist auf $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar, also gilt nach dem Satz von Schwarz, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{x})$.

1. Wir berechnen zuerst den Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right)^T = (-2xf(\mathbf{x}), -2yf(\mathbf{x}))^T$.

2. Jetzt berechnen wir die Hesse-Matrix.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})(4x^2 - 2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})(4y^2 - 2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})4xy$$

3. Die Formel für das Taylorpolynom 2. Ordnung lautet

$$T_{f,2,\mathbf{x_0}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T \nabla f(\mathbf{x_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T H_f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}).$$

Daraus folgt

$$T_{f,2,\mathbf{x_0}}(\mathbf{x}) = e^{-5}\left(1 - 2(x-1) - 4(y-2) + (x-1)^2 + 7(y-2)^2 + 8(x-1)(y-2)\right)$$

2) Für die Berechnung der Extremstellen muss man erstmal die kritischen Punkte bestimmen, d.h. alle Punkte $\mathbf{x}$, so dass $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. Nach der Rechnung aus Teil 1) erhält man

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0,$$

da $e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Das heißt, $\mathbf{x_1} = (0,0)^T$ ist der einzige kritische Punkt. Für diesen Punkt gilt $H_f(\mathbf{x_1}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ und diese Matrix ist negativ definit. Daraus folgt, dass die Funktion eine lokale Maximalstelle im Punkt $\mathbf{x_1}$ besitzt und keine andere lokale Extremstelle hat. Der zugehörige lokale Extremwert ist $f(\mathbf{x_1}) = 1$. Da f überall beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist, folgt, dass $f(\mathbf{x_1}) = 1$ auch globales Maximum ist und der einzige globale Extremwert ist.

Aufgabe II.3: **(8 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Vektorfelder jeweils, ob eine Stammfunktion existiert.
Wenn eine Stammfunktion existiert, geben Sie eine solche an.

a) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v(x,y) = (x + y^2 + y, 2yx + x^2)^T$

b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = (2xy + \cos(z), 2\sin(y)\cos(y) + x^2, -x\sin(z))^T$

a) Es gilt $\partial_y v_1(x,y) = 2y + 1$ und $\partial_x v_2(x,y) = 2y + 2x$, also $\partial_y v_1 \neq \partial_x v_2$, es gibt also keine Stammfunktion von v.
b) Es gilt $\partial_y v_1(x,y,z) = 2x = \partial_x v_2(x,y,z)$, außerdem $\partial_z v_1(x,y,z) = -\sin(z) = \partial_x v_3(x,y,z)$, außerdem $\partial_z v_2(x,y,z) = 0 = \partial_y v_3(x,y,z)$. Also gibt es eine Stammfunktion f von v.
Bestimmung von f: Es muss gelten: $\partial_x f(x,y,z) = 2xy + \cos(z)$. Also $f(x,y,z) = x^2 y + x\cos(z) + c_1(y,z)$, wobei $c_1(y,z)$ nur von y und z abhängt. Weiter muss gelten: $\partial_y f(x,y,z) = 2\sin(y)\cos(y) + x^2$. Also $f(x,y,z) = x^2 y + \sin^2(y) + c_2(x,z)$, wobei $c_2(x,z)$ nur von x und z abhängt. Weiter muss gelten: $\partial_z f(x,y,z) = -x\sin(z)$. Also $f(x,y,z) = x\cos(z) + c_3(x,y)$, wobei $c_3(x,y)$ nur von x und y abhängt. Lässt sich eine Funktion f so darstellen, dass diese drei Bedingungen erfüllt sind, so ist sie eine Stammfunktion von v. Wir können also $f(x,y,z) = x^2 y + x\cos(z) + \sin^2(y)$ als Stammfunktion von v wählen. (Dabei ist $c_1(y,z) = \sin^2(y)$ und $c_2(x,z) = x\cos(z)$ und $c_3(x,y) = x^2 y + \sin^2(y)$.)

Aufgabe II.4: **(6+6 Pkt.)**

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'(t) = 2t + 3ty(t) + ty(t)^2.$$

Hinweis: Verifizieren Sie, dass $y_p(t) = -1$ eine partikuläre Lösung ist.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} - \sqrt{y(x)} = 0, \quad y(9) = 9.$$

1) Es handelt sich um eine Riccati-Differentialgleichung der Form

$$y' + \alpha(t)y + \beta(t)y^2 = f(t)$$

mit $\alpha(t) = -3t$, $\beta(t) = -t$ und $f(t) = 2t$. Wir überprüfen zuerst, dass die oben angegebene Lösung $y_p(t) = -1$ tatsächlich eine Lösung ist:

$$2t + 3ty_p(t) + ty_p(t)^2 = 2t - 3t + t = 0 = y_p'(t).$$

Sei

$$z(t) = \frac{1}{y(t) - y_p(t)}.$$

z ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$z' - (\alpha(t) + 2\beta(t)y_p(t))z = \beta(t), \quad \text{i.e. } z' + tz = -t$$

Die allgemeine Lösung (für z) ist gegeben durch

$$z(t) = e^{G(t)}\left(C + \int e^{-G(s)} \cdot (-s)ds\right), \quad \text{wobei } G(t) = \int -sds = \frac{-t^2}{2}.$$

Das heißt

$$z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(C - e^{\frac{t^2}{2}}\right).$$

Daraus erhält man die Lösung der originalen Differentialgleichung mit der Rücktransformation

$$y(t) = z(t)^{-1} + y_p(t) = \frac{1}{Ce^{\frac{-t^2}{2}} - 1} - 1.$$

2) Es handelt sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung der Form:

$$y' + \alpha(x)y = f(x)y^\beta$$

mit $\alpha(x) = x^{-1}$, $\beta = 1/2$ und $f(x) = 1$. Sei dann $z = y^{1-\beta} = \sqrt{y}$. z ist eine Lösung der (inhomogenen) linearen Differentialgleichung

$$z' + (1-\beta)\alpha(x)z = (1-\beta)f(x) \quad \text{i.e. } z' + \frac{1}{2}x^{-1}z = 1/2.$$

Die allgemeine Lösung (für z) ist gegeben durch

$$z = z_h + z_p$$

wobei z_h die Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist und z_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. $z_h(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}} = \frac{C}{\sqrt{|x|}}$. Da wir eine Lösung suchen die für $x = 9$ (siehe Anfangsbedingung) definiert ist, dürfen wir $x > 0$ annehmen, also den Betrag weglassen: $z_h(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$. Die partikuläre Lösung findet man mit Hilfe der Methode der Variation der Konstante; sei $z_p(x) = C(x)/\sqrt{x}$. z_p ist eine Lösung wenn gilt

$$\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C(x) = \frac{x^{3/2}}{3}.$$

Insgesamt erhält man

$$z(x) = \frac{3C + x^{3/2}}{3\sqrt{x}}.$$

Nach der Anfangsbedingung gilt $z(9) = \sqrt{y(9)} = 3$ und daraus folgt

$$\frac{3C + 9^{3/2}}{3\sqrt{9}} = 3 \Leftrightarrow \frac{C+9}{9} = 1 \Leftrightarrow C = 0,$$

und $z(x) = \frac{x}{3}$. Aus $y(x) = z(x)^2$ folgt $y(x) = \frac{x^2}{9}$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $\mathbf{x}_0 \in D$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Es gelte $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ und die Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ habe die Eigenwerte 0 und 1. Dann gilt stets: f hat in $\mathbf{x}_0$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

b) Es sei D ein regulärer Bereich im $\mathbb{R}^3$, dessen Inneres nicht leer sei. Weiter sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{div} v(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, und es sei $\operatorname{div} v(\mathbf{x_0}) \neq 0$ für einen Punkt $\mathbf{x_0}$ im Inneren von D. Dann gilt stets $\int_{\partial D} v \cdot do \neq 0$.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq K < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h., f ist eine Kontraktion). Dann gilt stets: f besitzt höchstens einen Fixpunkt.

d) Die Menge aller Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < x < 1$ und $y = 0$ bildet eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

e) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}$, so hat die Differentialgleichung $y^{(2n+1)} + a_{2n} y^{(2n)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$ stets eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ für eine geeignete reelle Zahl λ_0. (Dabei bezeichnet $y^{(k)}$ die k-te Ableitung von y.)

a) Die Aussage ist falsch. Ein Beispiel mit Sattelpunkt: Sei $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) - (y - y_0)^4$ (dabei ist $\mathbf{x} = (x, y)^T$). Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$f\left(\mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon^2/2 > f(\mathbf{x}_0)$$
$$f\left(\mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}\right) = f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon^4 < f(\mathbf{x}_0).$$

b) Die Aussage ist richtig. Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\int_{\partial D} v \cdot do = \int_D \operatorname{div} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(Wir dürfen annehmen, dass der Normaleneinheitsvektor von D überall nach außen zeigt.) Da $\operatorname{div} v(\mathbf{x}_0) \neq 0$ und $\operatorname{div} v$ stetig und überall ≥ 0 ist, gibt es $\varepsilon > 0, \eta > 0$ so dass für alle $\mathbf{x} \in B_\eta(\mathbf{x}_0)$ gilt $\operatorname{div} v(\mathbf{x}) > \varepsilon$. Daraus folgt:

$$\int_{\partial D} v \cdot do = \int_D \operatorname{div} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_{B_\eta(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \varepsilon Vol(B_\eta(\mathbf{x}_0)) > 0.$$

c) Die Aussage ist richtig. Wir nehmen an, dass zwei Punkte x und y in $\mathbb{R}$ existieren mit $x \neq y$, so dass $f(x) = x$ und $f(y) = y$. Dann gilt (wir verwenden den Mittelwertsatz) $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < |x - y|$, ein Widerspruch.

d) Die Aussage ist falsch. Sei D die angegebene Menge. Wir betrachten den Punkt $z_0 = (1/2, 0)^T \in D$. Wäre D offen, so gäbe es $\varepsilon > 0$, so dass alle Punkte $z \in \mathbb{R}^2$ mit $||z - z_0||_2 < \varepsilon$ in D lägen. Aber für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt der Punkt $z = (1/2, \varepsilon/2)^T$ die Bedingung $||z - z_0||_2 < \varepsilon$, liegt aber nicht in D. Also ist D nicht offen.

e) Die Aussage ist richtig. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^{2n+1} + a_{2n}\lambda^{2n} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Es handelt sich um eine Polynom von ungeradem Grad. Es gilt $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, also gibt es nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) eine reelle Zahl λ_0, die Nullstelle des Polynoms ist. Daraus folgt, dass die Funktion $f(x) = e^{\lambda_0 x}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.