Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Holger Rauhut **Aachen, den 02.08.2016**

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik III

SoSe 2016

Variante A

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Keine Fotokopien oder Ausdrucke. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.4) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens (Vorder- und Rückseite).

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in die entsprechenden Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüberhinaus können Sie im Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge in den jeweiligen Kästchen des Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgaben III) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Wenn eine Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch ein begründetes Gegenbeispiel geschehen. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Bitte lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen!

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(11 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

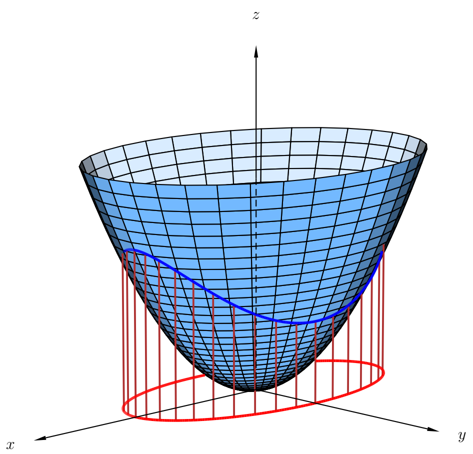
$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{\pi}{2}$$

genau einen Fixpunkt im Intervall $D = [0, \pi]$ besitzt.

Aufgabe I.2: **(11 Pkt.)**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Minimum annimmt sowie die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Maximum annimmt.

Aufgabe I.3: **(12 Pkt.)**



Bestimmen Sie den Inhalt der Teilfläche T, die vom Zylinder

$$Z := \{(x,y,z)^T : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2\}$$

aus dem elliptischen Paraboloid

$$S := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}\right\}$$

herausgeschnitten wird, d.h. von

$$T = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le c^2\right\}.$$

Aufgabe I.4: **(12 Pkt.)**

Im Kraftfeld $F(x,y) = \left(e^x \sin y - 4y + 2, \quad e^x \cos y - 4\right)^T$ wird ein Körper längs des oberen Halbkreises

$$H = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, y \ge 0\right\},$$

von $A = (a,0)^T$ zum Punkt $O = (0,0)^T$ gebracht. Wie groß ist die aufzuwendende Arbeit, d.h. $\int\limits_H F \cdot ds$?

Hinweis: Ergänzen Sie die Kurve durch Anfügen der Strecke von O nach A und verwenden Sie den Satz von Green.

Teil II

Aufgabe II.1: **(6+6 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$xy' - y = x^2 \sin x.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x^2+1)y' + 6xy^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe II.2: **(12 Pkt.)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Aufgabe II.3: **(10 Pkt.)**

Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \left(3x^2 - 3y, 2y^2 - 3x\right)^T,$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \left((1-\cos^3 t)\sin t, \frac{t}{8}(\cos t + 3)\right)^T.$$

a) Prüfen Sie, ob eine Stammfunktion von v existiert. Wenn ja, bestimmen Sie eine solche.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_\gamma v \cdot ds$.

Bitte wenden!

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

1) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}^n$. Falls $\nabla f(a) \neq 0$ gilt, dann ist

$$\|\nabla f(a)\|_2 = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(a) : \|v\|_2 = 1\right\}.$$

2) Es gibt keine Menge in $\mathbb{R}^n$, die gleichzeitig abgeschlossen und offen ist.

3) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ regulär und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

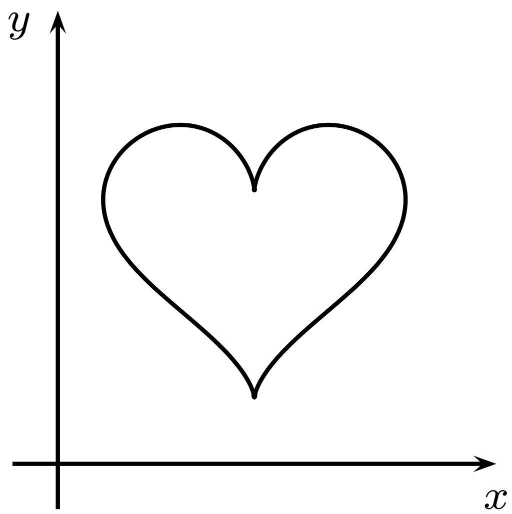
$$v(x, y, z) = \big(x + 2y, \quad 2y + 3z, \quad 3z + x\big)^T.$$

Der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$, $(x, y, z)^T \in \partial D$, zeige nach außen. Dann gilt

$$\int_{\partial D} v \cdot do \geq 0.$$

4) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall. Dann gibt es keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| > 1$ für alle $x \in I$, die einen Fixpunkt auf I besitzt.

5) Sei die herzförmige Kurve auf dem Bild



implizit durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben. Dann ist F lokal um jedem Punkt der Kurve nach y auflösbar.