Name: .... Matr.-Nr.: .... Variante: A/B

Antwortbogen

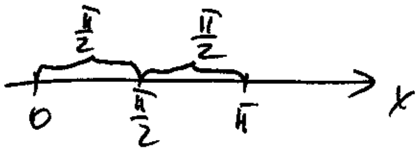
Teil I

Aufgabe I.1 $f(x) = \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{\pi}{2}$

- $\mathcal{D} = [0,\pi]$ ist abgeschlossen.
- f ist differenzierbar:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(2x)$$

$$x \in [0,\pi] \Rightarrow \left|x-\frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}$$



$$|\sin(2x)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{2}\left|x-\frac{\pi}{2}\right| \cdot |\sin(2x)| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{4} < 1.$$

$\Rightarrow$ f ist Kontraktion auf $\mathcal{D}$.

- Die Extremstellen von f auf $\mathcal{D}$ werden entweder im Punkten $f'(x)=0$, $x\in\mathcal{D}$, oder auf dem Rand $\{0,\pi\}$ liegen.

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(2x) = 0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ \sin(2x)=0, \\ 0\leq x\leq\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ 2x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ 0\leq x\leq\pi \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \\ x=\pi \end{array}\right.$$

Kandidaten für Extrema von f: $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

$$f(0) = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 - \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} \in [0,\pi]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$$

$$f(\pi) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} \in [0,\pi]$$

$\Rightarrow$ $0\leq f(x)\leq\pi$, $\forall x\in[0,\pi]$, f ist Selbstabbildung

Insgesamt folgt mit dem Fixpunktsatz von Banach, dass f auf $\mathcal{D}$ genau einen Fixpunkt besitzt.

A/B

Aufgabe I.2 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - 2x$

$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x - y = 0 \\ 2y^3 - y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = 0 \\ 2x^3 - x - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^3 - x - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Kritische Punkte: $(0,0)^T, (-1,-1)^T, (1,1)^T$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2 < 0, \ \det(H_f(0,0)) = 0$

$\Rightarrow H_f(0,0)$ negativ semidefinit

$f(0,0) = 0 \quad f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 - \varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1) < 0, \ 0 < \varepsilon < 1$

$f(\varepsilon, -\varepsilon) = \varepsilon^4 + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^2 = 2\varepsilon^4 > 0, \ 0 < \varepsilon < 1$

$\Rightarrow (0,0)$ kein lok. Extremstelle

$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 10 > 0 \ \det(H_f(-1,-1)) = 10^2 - 2^2 > 0$

$\Rightarrow H_f(-1,-1)$ positiv definit

$\Rightarrow (-1,-1)^T$ lok. Minimalstelle

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(1,1)$ positiv definit

$\Rightarrow (1,1)^T$ lok. Minimalstelle

Insgesamt erhalten wir:
Menge der Punkte, in denen f ein lok. Minimum annimt: $\{(-1,-1)^T, (1,1)^T\}$
Es gibt keine Punkte, in denen f ein lok. Maximum annimt.

A/B

Aufgabe I.3 $T=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 : z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\}=$

$=\{(x,y,\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b})^T : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\}$

Parametrisierung von T: $f(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\end{pmatrix}_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{x}{a}\end{pmatrix}$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{y}{b}\end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 0 & \frac{x}{a}\\0 & 1 & \frac{y}{b}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{x}{a}\\-\frac{y}{b}\\1\end{pmatrix}$, $\|\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial f}{\partial y}\|=$
$=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}$

$$F(T)=\int_T 1\,do=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2}\|\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial f}{\partial y}\|\,dx\,dy=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\,dx\,dy$$

$x=a\cdot r\cos\varphi$
$y=br\sin\varphi$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2}=r^2\le c^2$

$\Rightarrow 0\le r\le c,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$

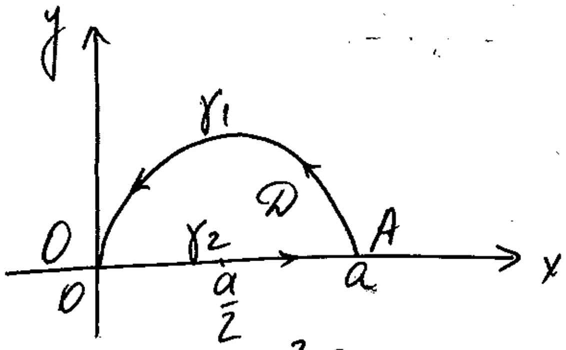
$\Phi(r,\varphi)=\begin{pmatrix}ar\cos\varphi\\br\sin\varphi\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi))=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -ar\sin\varphi\\b\sin\varphi & br\cos\varphi\end{vmatrix}=abr$

$$\Rightarrow F(T)=\int_0^{2\pi}\int_0^c\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi+1}\,abr\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^c\sqrt{r^2+1}\,abr\,dr\,d\varphi=$$

$$=[s=r^2+1,\ ds=2r\,dr]=\pi ab\int_1^{c^2+1}\sqrt{s}\,ds=\pi ab\cdot\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{c^2+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\pi ab\left((c^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

Aufgabe I.4



$\gamma_1 = \{(x,y)^T : (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\}$ $\quad \gamma_2 = \{(x,y)^T : y = 0,\ 0 \le x \le a\}$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds \overset{\text{Green}}{=} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cos y - 4$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} (e^x \cos y - e^x \cos y + 4)\,dx\,dy =$$

$$= 4 \iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

$\int_{\gamma_2} F \cdot ds$: $\quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le a \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot ds = \int_0^a \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ e^t - 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^a 2\,dt = 2a$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot ds = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy - \int_{\gamma_2} F \cdot ds = \frac{\pi a^2}{2} - 2a$$

Teil II

A

Aufgabe II.1

a)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$xy' - y = x^2 \sin x \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = x \sin x$ $y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$ hom. Lösung: $y_{hom}(x) = Ce^{-\int(\frac{1}{x})dx} = Ce^{\ln\lvert x\rvert} =$ $= Cx, \; C \in \mathbb{R}$ partik. Lösung: $y_p(x) = x \int x \sin x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$ $= x \int \sin x \, dx = -x \cos x$ $\Rightarrow y(x) = Cx - x\cos x = x(C - \cos x)$	$x(C - \cos x)$

b)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$(x^2+1)y' + 6xy^2 = 0 \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{y^2} + \frac{6x\,dx}{x^2+1} = 0$ $y(0) = \frac{1}{2}$ $\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{6x\,dx}{x^2+1}; \; s = x^2+1, \; ds = 2x\,dx$ $\Rightarrow -\frac{1}{y} = -3 \int \frac{ds}{s} = -3 \ln\lvert s\rvert + C = -3\ln(x^2+1) + C$ $y = \frac{1}{3\ln(x^2+1) - C}; \; y(0) = \frac{1}{-C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -2$ $\Rightarrow y = \frac{1}{3\ln(x^2+1) + 2}$	$\frac{1}{3\ln(x^2+1)+2}$

A

Aufgabe II.2

Lösungsskizze:

Eigenwerte von A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{3.\,Rh.}{=} 1\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1-1)+(2-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (\lambda-2)(1-(1-\lambda)^2-1) =$$

$$= -(\lambda-2)(1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

- $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = 0,\ x_1 = x_3;\quad v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ y_1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = x_3 = x_1$$

$$v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ y_2(x) = e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = x_3 - 1 \\ x_1 = 1 + x_3 \end{array}$$

$$w = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ y_3(x) = e^{x}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ergebnis:

$$\left\{ e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e^{x}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \right\}$$

Aufgabe II.3

a)

Lösungsskizze:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} \Rightarrow \exists\, \Phi: \nabla\Phi = v$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y^2 - 3x$$

$$\Phi(x,y) = \int (3x^2-3y)\,dx + C(y) = x^3 - 3xy + C(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -3x + C'(y) = 2y^2 - 3x \Rightarrow C'(y) = 2y^2$$

$$C(y) = \int 2y^2\,dy + D = \frac{2}{3}y^3 + D,\ D = const$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{2}{3}y^3 + D,\ D = const$$

Ergebnis:

$$x^3 - 3xy + \frac{2}{3}y^3 + D,$$
$$D = const$$

A

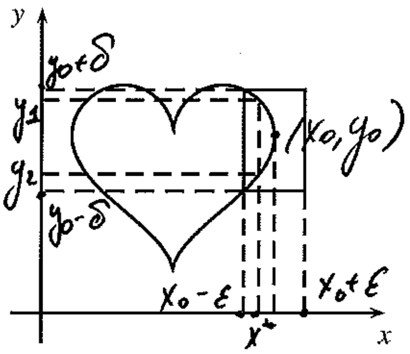
b)

Lösungsskizze:	Ergebnis:
$\nabla \phi = \sigma \Rightarrow \int_\gamma \sigma \cdot ds = \phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0))$ $\gamma(2\pi) = (0, \frac{2\pi}{8} \cdot 4)^T = (0, \pi)^T$; $\gamma(0) = (0, 0)^T$ $\int_\gamma \sigma \cdot ds = \frac{2\pi^3}{3} - 0 = \frac{2\pi^3}{3}$	$\frac{2\pi^3}{3}$

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

A

1)	W	$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \le \|\nabla f(a)\|_2 \cdot \|v\|_2 = \|\nabla f(a)\|_2, \ (\|v\|_2 = 1)$ $\Rightarrow \max\{\frac{\partial f}{\partial v}(a) : \|v\|_2 = 1\} \le \|\nabla f(a)\|_2$ Sei $\tilde{v} = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|_2} \nabla f(a) \Rightarrow \|\tilde{v}\|_2 = 1$ $\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(a) = \langle \nabla f(a), \frac{1}{\|\nabla f(a)\|_2} \nabla f(a) \rangle = \frac{\|\nabla f(a)\|_2^2}{\|\nabla f(a)\|_2} = \|\nabla f(a)\|_2$ $\Rightarrow \max\{\frac{\partial f}{\partial v}(a) : \|v\|_2 = 1\} = \|\nabla f(a)\|_2$
2)	F	$\mathbb{R}^n$ ist offen, da jeder Punkt von $\mathbb{R}^n$ innerer Punkt ist. $(\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n)$ $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset \Rightarrow \partial \mathbb{R}^n = \emptyset \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \partial \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ abgeschlossen
3)	W	Satz von Gauss: $\int_{\partial D} v \cdot do = \iiint_D \operatorname{div} v(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$ $\operatorname{div} v(x,y,z) = 1+2+3 = 6$ $\Rightarrow \int_{\partial D} v \cdot do = 6 \iiint_D dx\,dy\,dz = 6 \cdot vol(D) \ge 0$
4)	W	$f(x) = 2x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differ. $I = [-1,1]$ abgeschlossen, beschränkt $f'(x) = 2 > 1, \ \forall x \in I$ $f(0) = 0 \Rightarrow 0$ ist ein Fixpunkt
5)		 $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x^* \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $\exists y_1, y_2 \in (y_0-\delta, y_0+\delta), y_1 \ne y_2$: $F(x^*, y_1) = 0$ $F(x^*, y_2) = 0$