Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Oliver Schaudt

Aachen, den 21.02.2018

Klausur zur Mathematik III

WS 2017/18

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(7+3 Pkt.)**

Sei $(x_1, x_2)^T \in D = [-1, 1]^2$. **Betrachten Sie den vollständigen normierten Raum** $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, und das folgende nicht-lineare System:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\cos(x_2)}{3} + \frac{1}{6} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{x_1^2+4}}{10} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das System eine eindeutige Lösung in D hat.

2) Sei $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$. Wie viele Iterationen sind ausreichend um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{1}{4 \cdot 3^4}$ zu garantieren?

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.1 (Fortsetzung):

Aufgabe I.2: **(15 Pkt.)**

Beweisen Sie, dass folgende Funktion ein Minimum annimmt und bestimmen Sie die lokalen und globalen Minimalstellen und zugehörigen Funktionswerte:

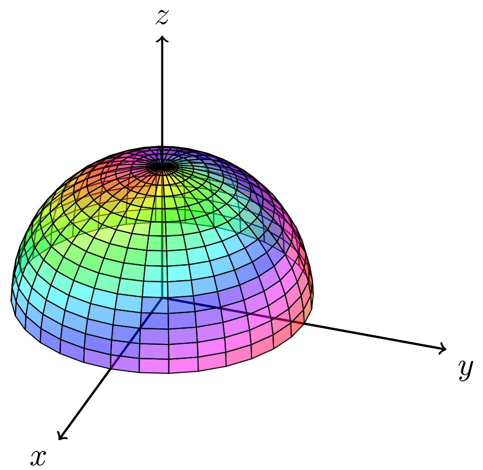
$$f: \begin{array}{lcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & x^2 + 3xy + y^2 - 4, \end{array}$$

wobei $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$.

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.2 (Fortsetzung):

Aufgabe I.3: **(15 Pkt.)**



Seien $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das durch $v(x,y,z) = (yz, ze^x, y^2)^T$ definierte Vektorfeld und

$$M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 1-x^2-y^2, z \geq 0\}$$

der Mantel einer oberen Halbkugel (siehe Abbildung). Dabei sei das Normalfeld nach außen gerichtet.
Berechnen Sie folgendes Integral: $\int\limits_M v \cdot do.$

Lösung:

Lösung zu Aufgabe I.3 (Fortsetzung):

Teil II

Aufgabe II.1: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y''' - 8y'' + 16y' = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = -5, y''(0) = -8.$$

Ergebnis:

Lösungsweg:

Aufgabe II.2: **(10 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' + 4xy + y^2 = -4x^2 + 2, \quad y(0) = 4.$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $y_p(x) = -2x + 2$ eine partikuläre Lösung ist.

Ergebnis:

Lösungsweg:

Aufgabe II.3: **(12 Pkt.)**

Seien

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \, : \, \frac{1}{2} < \|x\|_2 < 1, x_1 > x_2, x_1, x_2 > 0 \right\}$$

und

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh(\|x\|_2^2)}{\|x\|_2^2} \cdot \frac{x_2 \cdot x_3}{x_1} + 1.$$

Berechnen Sie $\int\limits_V f(x)\, dx$.

Ergebnis:

Lösungsweg:

Aufgabe II.4: **(8 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion g. Berechnen Sie die Determinante der Jacobimatrix der lokalen Umkehrfunktion g^{-1} in einem allgemeinen Punkt $g(x, y, z)$, wobei $(x, y, z)^T \in (0, \infty)^3$.

$$g : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(x + z) \\ \ln(x + y) \\ \sqrt{y + z} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Voraussetzungen des Satzes über die inverse Funktion für die Funktion g in allen Punkten des Definitionsbereiches erfüllt sind.

Ergebnisse:
$\text{Det}\left(Dg^{-1}\left(g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\right)\right) =$

Lösungsweg:

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer, und sei $f : D \to D$ eine Abbildung. Es gelte

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

für alle $x, y \in D$. Unter diesen Voraussetzungen hat f stets mindestens einen Fixpunkt.

b) Es gibt unendlich viele positive reelle Zahlen β, sodass die Funktion $f_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\beta(0, 0) = 0$ und

$$f_\beta(x, y) = \frac{x^4 + y^6}{(x^2 + y^2)^{3\beta}} \text{ für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T$$

im Nullpunkt stetig ist.

c) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\alpha(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei y eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $y' + y = \alpha(x)y$. Dann gilt stets $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

d) Sei $S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir das Vektorfeld

$$v_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

durch

$$v_a(x, y, z) = \begin{pmatrix} ax + y^2 + z^2 \\ x^2 + ay + z^2 \\ x^2 + y^2 + az \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es zu jeder reellen Zahl u eine reelle Zahl a mit $\int_S v_a \cdot do = u$. (Dabei sei das Normalenfeld von S nach außen gerichtet.)

e) Es gibt eine natürliche Zahl $n > 2$, sodass das Anfangswertproblem $y' = \sqrt[n]{y^2},\ y(2) = 0$ auf dem Intervall $(1, 3)$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	