**Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)**
**Prof. Dr. Oliver Schaudt**
**Jonathan Fell, M.Sc.**

**Aachen, den 30.07.2018**

# Wiederholungsklausur zur Mathematik III

**SS 2018**

## Variante A

| Name | Matrikelnr. |
|---|---|
| | |

## Hinweise

---

**Zugelassene Hilfsmittel:**
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

**Bewertung:**
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

**I:** (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

**II:** (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

**III:** (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

**Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.**

# Viel Erfolg!

# Teil I

**Aufgabe I.1:** **(7+3 Pkt.)**

Betrachten Sie den vollständigen normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und die Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(y) \\ e^{-x\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

1) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion $f$ einen Fixpunkt besitzt und als Lipschitzkonstante $\lambda = \frac{1}{2}$ gewählt werden kann.

2) Sei $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T$. Wie viele Iterationen sind, gemäß der a-priori-Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes, ausreichend um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2^{-4}$ zu garantieren?

**Lösung**:

**Lösung zu Aufgabe I.1 (Fortsetzung):**

**Aufgabe I.2:** **(3+5+10 Pkt.)**

Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem:

Gesucht sind dasjenige $\mathbf{x} \in D$, welches minimalen Abstand bezüglich der euklidischen Norm zum Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat, sowie der zugehörige Abstand. Hierbei sei

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, xz - x - z + \frac{1}{2}y^2 = 0 \right\}.$$

1. Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion des Optimierungsproblems auf.
2. Begründen Sie weiterhin, warum ein Punkt minimalen Abstands existiert.
3. Berechnen Sie den Punkt minimalen Abstands, sowie den zugehörigen Abstand, vermöge der Methode von Lagrange.

**Lösung**:

**Lösung zu Aufgabe I.2 (Fortsetzung):**

**Aufgabe I.3:** **(4+8 Pkt.)**

Gegeben seien die Fläche

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 - x = 0, 0 < x < 3 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(z) \\ z^2 \\ e^z \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie $\partial F$ an.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial F} v \cdot ds$ mittels des Satzes von Stokes. Das Normalenfeld zeige dafür nach außen.

**Lösung**:

**Lösung zu Aufgabe I.3 (Fortsetzung):**

# Teil II

**Aufgabe II.1:** **(4+4+4 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{xz} + \ln(x+y).$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $a = (1,1,1)^t$ in Richtung $p = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)^t$.

b) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $v : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}^3$ so, dass $f$ eine Stammfunktion von $v$ ist.

c) Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\int_\gamma v \cdot ds$.

| **Ergebnis:** | |
|---|---|
| a) | b) |
| c) | |

**Lösungsweg**:

**Aufgabe II.2:** **(13 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} y \qquad \text{mit Anfangswert} \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3e \end{pmatrix}.$$

| **Ergebnis:** |
| --- |
| |

**Lösungsweg**:

**Aufgabe II.3:** **(15 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy^2 = \frac{3}{x^3}, \;\; y(1) = \frac{25}{7}.$$

Bestimmen Sie zunächst eine spezielle Lösung, als Ansatz für diese verwenden Sie Funktionen der Form $y(x) = 3x^p$ mit $p \in \mathbb{Z}$.

| **Ergebnis:** |
| --- |
| |

**Lösungsweg**:

# Teil III

**Aufgabe III.1:** **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $r > 0$, dann gilt stets

$$\int_{\partial B} \operatorname{rot}(v) \cdot do = 0.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und diagonalisierbar, dann ist $e^A$ ebenfalls stets symmetrisch und diagonalisierbar.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots a_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann besitzt die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k y^{(k)}(x) = 0$$

stets eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ für ein geeignetes $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $y^{(k)}(x)$ die $k$-te Ableitung von $y$ in $x$.

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \binom{x}{y} \mapsto (x^7y^3 + 9x^2y^5 - 5x^6y^2) \cdot \cos(x) \cdot e^y$. Dann ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

e) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so nimmt $f$ auf $D$ Maximum und Minimum an.

**Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.**

# Viel Erfolg!

**Aufgabe III.1**
Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

| | |
|---|---|
| a) | |
| b) | |
| c) | |
| d) | |
| e) | |