Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. Dr. Oliver Schaudt
Jonathan Fell, M.Sc.

Aachen, den 30.07.2018

Wiederholungsklausur zur Mathematik III

SS 2018

Variante A

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(7+3 Pkt.)**

Betrachten Sie den vollständigen normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und die Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-x}\sin(y) \\ e^{-x\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

1) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion f einen Fixpunkt besitzt und als Lipschitzkonstante $\lambda = \frac{1}{2}$ gewählt werden kann.

2) Sei $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T$. Wie viele Iterationen sind, gemäß der a-priori-Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes, ausreichend um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2^{-4}$ zu garantieren?

Lösung:

1) Zunächst halten wir fest, dass $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger, normierter Raum und $[0,1]^2$ abgeschlossen sind. Nun gehen wir die verbleibenden Voraussetzungen des Fixpunktsatzes durch:

   Selbstabbildung: Seien $x, y \in [0,1]$. Dann ist $0 \leq e^{-x}\sin(y) \leq 1$ da bereits beide Faktoren es sind. Weiterhin ist $-x\cos(y) \in [-\cos(1), 0]$,also $e^{-x\cos(y)} \in (0,1)$. Damit ist f eine Selbstabbildung.

   Kontraktion: Es ist

   $$Df(x,y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-x}\sin(y) & e^{-x}\cos(y) \\ -\cos(y)e^{-x\cos(y)} & x\sin(y)e^{-x\cos(y)} \end{pmatrix}$$

   und die $\|\cdot\|_\infty$-Norm impliziert die Zeilensummennorm. Also ist

   $$\begin{aligned}\max_{x,y\in[0,1]} \|Df(x,y)\|_\infty &= \frac{1}{4}\max_{x,y\in[0,1]} \max\{\underbrace{e^{-x}}_{=1}(|\sin(y)| + |\cos(y)|), \underbrace{e^{-x\cos(y)}}_{=1}(|\underbrace{x}_{\in[0,1]}\sin(y)| + |\cos(y)|)\} \\ &\leq \frac{1}{4}\max_{x,y\in[0,1]} \max\{(|\sin(y)| + |\cos(y)|), (|\sin(y)| + |\cos(y)|)\}\end{aligned}$$

   Nun sind $0 \leq \sin(y), \cos(y) \leq 1$ für $y \in [0,1]$. Damit folgt

   $$\frac{1}{4}\max_{x,y\in[0,1]} \max\{(|\sin(y)| + |\cos(y)|), (|\sin(y)| + |\cos(y)|)\} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

   und damit können wir im Folgenden $\lambda = \frac{1}{2}$ als Lipschitzkonstante verwenden. Dies begründet sich durch den Mittelwertsatz begründen, aus dem sich nämlich folgern lässt, dass für differenzierbares f und $x, y \in \mathbb{R}^d$ stets ein ξ auf der Geraden zwischen x und y liegt, sodass

   $$\|f(x) - f(y)\| = \|Df(\xi)\|\|x - y\|$$

   gilt.

   Insgesamt sind also alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

2) Laut Vorlesung gilt, dass die Anzahl der benötigten Schritte n gemäß der a-priori-Fehlerabschätzung nach unten beschränkt werden kann durch

   $$\begin{aligned} n &\geq \frac{\ln\left(\frac{(1-\lambda)\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|_\infty}\right)}{\ln(\lambda)} = -\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\|f(x_0)\|_\infty}\right)}{\ln(2)} = -\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\|\binom{0}{1/4}\|_\infty}\right)}{\ln(2)} = -\frac{\ln(2^{-4-1+2})}{\ln(2)} \\ &= -\frac{\ln(2^{-3})}{\ln(2)} = 3 \end{aligned}$$

   Es genügen also bereits 3 Iterationsschritte um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

Aufgabe I.2: **(3+5+10 Pkt.)**

Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem:
Gesucht sind dasjenige $\mathbf{x} \in D$, welches minimalen Abstand bezüglich der euklidischen Norm zum Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat, sowie der zugehörige Abstand. Hierbei sei

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, xz - x - z + \frac{1}{2}y^2 = 0 \right\}.$$

1. Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion des Optimierungsproblems auf.
2. Begründen Sie weiterhin, warum ein Punkt minimalen Abstands existiert.
3. Berechnen Sie den Punkt minimalen Abstands, sowie den zugehörigen Abstand, vermöge der Methode von Lagrange.

Lösung:

1. Gemäß Vorlesung ist

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \underbrace{\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2}_{=:f(x,y,z)} + \lambda \underbrace{\left(xz - x - z + \frac{1}{2}y^2 \right)}_{=:g(x,y,z)}$$

die Langrangefunktion zum Problem $\min f(x)$ so, dass $g(x) = 0$, und dieses ist äquivalent zu

$$\min \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \quad \text{so, dass } g(x) = 0$$

da $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wächst, also die Minimierer von f genau die Minimierer von $\| \cdot \|_2$ sind.

2. Es ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in D$ und $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{3}$, also folgt $\min_{x \in D} f(x) \leq \frac{3}{2}$. Damit ist $\min_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D \cap \overline{B_{\sqrt{3}}((1,0,1)^t)}} f(x)$, das heißt ein Minimierer von f muss in $D \cap \overline{B_{\sqrt{3}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$ liegen und diese Menge ist kompakt da D als Nullstellenmenge einer stetigen Funktion auch abgeschlossen ist. Da f stetig ist, folgt die Behauptung.

3. Die Lagrangegleichung lautet

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = -\lambda \nabla g = -\lambda \begin{pmatrix} z - 1 \\ y \\ x - 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\lambda = 0$ bereits $x = y = z = 1$ impliziert, und dieser Punkt nicht in D liegt, nehmen wir von nun an $\lambda \neq 0$ an. Dann erhalten wir aus der ersten und dritten Gleichung

$$x - 1 = -\lambda(z - 1) = \lambda^2(x - 1).$$

Ist $x = 1$ so folgt wegen $\lambda \neq 0$ auch $z = 1$ und daraus wegen $g(x, y, z) = 0$ sofort $y = \pm\sqrt{2}$. Falls nun $x \neq 1$, so ist $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = 1$: In diesem Fall ist $x - 1 = 1 - z$, also $x + z = 2$ und $y - 1 = -y$, also $y = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in die Nebenbedingung bedeutet dies

$$0 = x(2-x) - x - (2-x) + \frac{1}{8} = -x^2 + 2x - \frac{15}{8} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{15}{8}} \lightning .$$

$\lambda = -1$. In diesem Fall ist $x = z$ und $y - 1 = y \lightning$.

Insgesamt erhalten wir also lediglich $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in D$ als Lösung der Lagrangegleichung. Es sind $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2} - 1$ und $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2} + 1$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ der gesuchte Minimierer.

Aufgabe I.3: **(4+8 Pkt.)**

Gegeben seien die Fläche

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 - x = 0, 0 < x < 3 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(z) \\ z^2 \\ e^z \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie ∂F an.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial F} v \cdot ds$ mittels des Satzes von Stokes. Das Normalenfeld zeige dafür nach außen.

Lösung:

a) Es ist

$$\partial F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = 3, y^2 + z^2 = 3 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

der Kreisring mit Radius $\sqrt{3}$ um $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die folgende Integration kann der Nullpunkt gegebenfalls vernachlässigt werden, da es sich dabei um eine Nullmenge handelt.

b) Es ist

$$\int_{\partial F} v \cdot ds = \int_F \mathsf{rot}(v) \, do = \int_F \begin{pmatrix} -2z \\ \sin(z) \\ 0 \end{pmatrix} \, do.$$

F ist ein Rotationsparaboloid der Höhe 3, den wir vermöge

$$\psi : [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird. Folglich ist das Normalenfeld gegeben durch

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \phi}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 2r \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -2r^2\cos(\phi) \\ -2r^2\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Dieses Normalenfeld zeigt nach innen. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_F \begin{pmatrix} -2z \\ -\sin(z) \\ 0 \end{pmatrix} \, do &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2r\sin(\phi) \\ -\sin(r\sin(\phi)) \\ 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} r \\ -2r^2\cos(\phi) \\ -2r^2\sin(\phi) \end{pmatrix} \right\rangle \, d\phi dr \\
&= -\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} -2r^2\sin(\phi) \, d\phi dr - \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} 2r^2\cos(\phi)\sin(r\sin(z)) \, d\phi dr \\
&= -\int_0^{\sqrt{3}} -2r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\phi) \, d\phi}_{=0} - \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} 2r^2\cos(\phi)\sin(r\sin(\phi)) \, d\phi dr
\end{aligned}$$

$$\overset{\substack{u=r\sin(\phi)\\ \frac{du}{d\phi}=r\cos(\phi)}}{=} -\int_0^{\sqrt{3}} 2r \int_{u(0)}^{u(2\pi)} \sin(u)\, du dr = -\int_0^{\sqrt{3}} 2r - \cos(r\sin(\phi))|_0^{2\pi} dr$$

$$= -\int_0^{\sqrt{3}} 2r(-\cos(0)+\cos(0))dr = 0$$

ALTERNATIV

Wir verwenden, dass wir nur über den Kreisring integrieren müssen. Da dieser der Rand der Kreisscheibe

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2+z^2 \leq 3 \right\}$$

ist, folgt

$$\int_{\partial F} v \cdot ds = \int_{\partial B} v \cdot ds = \int_B \mathsf{rot}(v)\, do = \int_B \begin{pmatrix} -2z \\ \sin(z) \\ 0 \end{pmatrix} do.$$

und der Normalenvektor dieser Scheibe ist $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. B parametrisieren wir vermöge der Polarkoordinaten,

$$\psi : (0,\sqrt{3}) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \times \frac{\partial\psi}{\partial\phi}(r,\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos(\phi) \\ -r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Normalenvektor nach außen zeigen soll, folgt daraus

$$\int_B \begin{pmatrix} -2z \\ -\sin(z) \\ 0 \end{pmatrix} do = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2r\sin(\phi) \\ -\sin(r\sin(\phi)) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\phi dr$$

$$= -\int_0^{\sqrt{3}} 2r^2\, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\phi)\, d\phi}_{=0} = 0$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(4+4+4 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{xz} + \ln(x+y).$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $a = (1,1,1)^t$ in Richtung $p = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)^t$.

b) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $v : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}^3$ so, dass f eine Stammfunktion von v ist.

c) Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\int_\gamma v \cdot ds$.

Ergebnis:	
a) $\frac{7}{2\sqrt{14}}$	b) $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} \end{pmatrix}$
c) $3 + \ln(3)$	

Lösungsweg:

a) Es ist $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} \end{pmatrix}$

$$\frac{df}{dp}(a) = \frac{1}{\|p\|_2}\langle \nabla f(a), p\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{2\sqrt{4}}$$

b) Dies ist $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} \end{pmatrix}$.

c) Aus Teil b) ist bereits eine Stammfunktion von v bekannt, nämlich f, also verwenden wir den Hauptsatz, der besagt

$$\int_\gamma v \cdot ds = f(\gamma(2)) - f(\gamma(1)) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{16} + \ln(6) - 1 - \ln(2) = 3 + \ln(3).$$

Aufgabe II.2: **(13 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} y \qquad \text{mit Anfangswert} \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3e \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:
$y(x) = \binom{2e^x}{(6x-3)e^x}$

Lösungsweg:

Wir schreiben $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A_1 + A_2$ mit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = A_2 A_1$ und außerdem ist $A_2^k = 0$ für $k \geq 2$.

Wir erhalten ein Fundamentalsystem von Lösungen aus der Matrixexponentialfunktion

$$e^{Ax} = e^{A_1 x + A_2 x} = e^{A_1 x} \cdot e^{A_2 x} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \left(I + x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 3xe^x & e^x \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung hat nun die Form $y(x) = e^{Ax} c$ für $c \in \mathbb{R}^2$, also mit den oben gegebenen Anfangswerten ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2e \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e \\ 3e \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}$$

also $c_1 = 2, c_2 = -3$.

Aufgabe II.3: **(15 Pkt.)**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy^2 = \frac{3}{x^3},\ \ y(1) = \frac{25}{7}.$$

Bestimmen Sie zunächst eine spezielle Lösung, als Ansatz für diese verwenden Sie Funktionen der Form $y(x) = 3x^p$ mit $p \in \mathbb{Z}$.

Ergebnis:
$y(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2x^6 - \frac{1}{4}x^2}$

Lösungsweg:

Es handelt sich im vorliegenden Fall um eine riccatische Differentialgleichung. Wir verwenden die Notation aus den Folien und es sind

$$f(x) = \frac{3}{x^3}, \qquad \alpha(x) = 0, \qquad \beta(x) = x.$$

Um eine spezielle Lösung zu finden, setzen wir $y_s(x) = 3x^p$ in die Differentialgleichung ein und erhalten $3px^{p-1} + 9x^{2p+1} = 3x^{-3}$. Dieses Polynom muss konstant 0 sein, also müssen sich die einzelnen Monome gegenseitig auslöschen, das heißt $-3 = p - 1 = 2p + 1$, also $p = -2$. Wir verwenden als Lösung folglich $y_s(x) = \frac{3}{x^2}$. Nach Substitution $z = \frac{1}{y - y_s}$ ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$z' - 2x\left(\frac{3}{x^2}\right)z = z' - \frac{6}{x}z = x.$$

Wir berechnen nun

$$A(x) := \int -\frac{6}{x}\,dx = \ln(x^{-6}), C(x) = \int xe^{A(x)}\,dx = \int x^{-5}\,dx = -\frac{1}{4x^{-4}}$$

und damit ergibt sich mit $C \in \mathbb{R}$ als Lösung

$$z(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int xe^{A(x)}\,dx = Cx^6 - \frac{x^2}{4}.$$

Rücksubstitution $y = y_s + \frac{1}{z}$ gemäß Riccati ergibt dann $y(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{Cx^6 - \frac{1}{4}x^2}, C \in \mathbb{R}$. Aus dem Startwert ergibt sich nun $C = 2$.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $r > 0$, dann gilt stets

$$\int_{\partial B} \text{rot}(v) \cdot do = 0.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und diagonalisierbar, dann ist e^A ebenfalls stets symmetrisch und diagonalisierbar.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots a_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann besitzt die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k y^{(k)}(x) = 0$$

stets eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ für ein geeignetes $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $y^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung von y in x.

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \binom{x}{y} \mapsto (x^7y^3 + 9x^2y^5 - 5x^6y^2) \cdot \cos(x) \cdot e^y$. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

e) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung in der zweiten Spalte.

a) W	Wir zerlegen $\partial B = B_1 \cup B_2$ disjunkt in eine obere und eine untere Halbkugelschale, dann ist mit dem Satz von Stokes $\int_{\partial B} \mathrm{rot}(v) \cdot do = \int_{\partial B_1} v \cdot ds + \int_{\partial B_2} v \cdot ds$ und $\partial B_1, \partial B_2$ sind entgegengesetzt orientierte Kreisringe. Dementsprechend $\int_{\partial B_1} v \cdot ds = -\int_{\partial B_2} v \cdot ds$, also $\int_{\partial B} \mathrm{rot}(v) \cdot do = 0$. Alternativ ist mit dem Satz von Gauss $$\int_{\partial B} \mathrm{rot}(v) \cdot do = \int_B \underbrace{\mathrm{div}(\mathrm{rot}(v))}_{=0} \, dV = 0$$
b) W	Zunächst ist $(e^A)^t = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k\right)^t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}(A^k)^t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}(A^t)^k = e^{A^t}$. Nun sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $QAQ^t = D$, wobei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal ist. Dann ist $Qe^AQ^t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} QA^kQ^t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}(QAQ^t)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} D^k = e^D = \begin{pmatrix} e^{d_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & e^{d_{n,n}} \end{pmatrix}$
c) W	Einsetzen von $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung liefert $$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k \lambda^k e^{\lambda x k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \lambda^k = 0$$ da $e^{\lambda x k} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Nun ist $\sum_{k=0}^{2n+1} a_k \lambda^k = 0$ ein reelles Polynom von ungeradem Grad, besitzt also nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine reelle Nullstelle λ_0. Dann ist $x \mapsto e^{\lambda_0 x}$ eine Lösung der Differentialgleichung.
d) W	$x \mapsto \cos(x)$ und $y \mapsto e^y$ sind bereits Potenzreihen in x und y respektive, weiterhin ist $\binom{x}{y} \mapsto x^7y^3 + 9x^2y^5 - 5x^6y^2$ ein Polynom und stimmt deswegen mit seiner Taylorentwicklung überein. Da also alle drei Faktoren von f jeweils durch Potenzreihen auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben sind, ist deren Produkt ebenfalls eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞.
e) F	Es ist $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ offensichtlich beschränkt, stetig laut Vorlesung und der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen. Angenommen, $\arctan$ würde nun ein Maximum $x_{\max} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ annehmen, dann wäre $\left(x_{\max}, \frac{\pi}{2}\right)$ nicht leer und wir wählen $x' \in \left(x_{\max}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann wäre $\arctan(y) = x'$ nicht lösbar, also $\tan$ im Punkt $x' \in \left(x_{\max}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nicht definiert.