Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 01.02.2020

Klausur zur Mathematik III

WS 2019/20

$\boxed{\text{Variante A}}$

Name	Matrikelnr.
Manuela Musterfrau	314159

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I Variante A

Aufgabe I.1: **(9+4 Pkt.)**

Betrachten Sie den vollständigen normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\,.\,\|_\infty)$, wobei $\|(x,y)^\top\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ die Maximumsnorm bezeichnet, und die Funktion

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} y^2-3 \\ x^2+3 \end{pmatrix}.$$

(Dabei sei $[-1,1]^2$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ebenfalls mit der Maximumsnorm versehen.)

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion f genau einen Fixpunkt $\overline{z} \in [-1,1]^2$ besitzt. Zeigen Sie dafür unter anderem, dass $\lambda = 1/2$ als Lipschitzkonstante von f bezüglich der Maximumsnorm gewählt werden kann.

b) Sei $z_0 = (0,0)^\top$ gegeben als Startwert der Fixpunktiteration $z_{n+1} := f(z_n)$. Wie viele Iterationen M sind gemäß der a-priori-Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes ausreichend, um

$$\|z_n - \overline{z}\|_\infty \leq 1/1000$$

für alle $n \geq M$ zu garantieren? (Hinweis: $2^{10} = 1024$.)

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

(i) $\mathbb{R}^2$ ist ein Banachraum und $D := [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen. **(1P)**

(ii) Selbstabbildung $f : D \to D$, d.h. für $x \in [-1,1]$ und $y \in [-1,1]$ müssen wir $\frac{1}{4}(y^2-3) \in [-1,1]$ und $\frac{1}{4}(x^2+3) \in [-1,1]$ zeigen. **(1P)**
Für den Beweis seien zwei Beispielhafte Wege angeführt (**2P**):

Grobe Abschätzung mittels $\triangle$-Ungleichung: Jeweils mit $u = x$ bzw. y,

$$\left|\frac{1}{4}(u^2 \pm 3)\right| \leq \frac{1}{4}(u^2+3) \overset{u\in[-1,1]}{\leq} 1\,.$$

Passgenaue Abschätzung: Unter Verwendung von $x^2, y^2 \in [0,1]$ folgt

$$f([-1,1]^2) = [-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}] \times [\tfrac{3}{4}, 1] \subset [-1,1]^2\,.$$

(iii) Kontraktion (zwei Wege, bis zu **4P**):

Direkter Weg: Offenbar gilt für alle $u_1, u_2 \in [-1,1]$, dass

$$\left|\frac{1}{4}\left((u_1^2 \pm 3) - (u_2 \pm 3)\right)\right| = \frac{1}{4}|u_1+u_2| \cdot |u_1-u_2| \overset{|u_i|\leq 1}{\leq} \frac{1}{2}|u_1-u_2|. \qquad \textbf{(3P)}$$

Die obige Ungleichung liefert für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [-1,1]$, dass

$$\left\| f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2}\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty \qquad \textbf{(1P)}$$

Über Gradient: Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1P)}$$

Für die Lipschitz-Konstante bzgl. Max-Norm schätzen wir die Matrixnorm (Zeilensummennorm) ab,

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\right\|_\infty = \max\left\{0 + \frac{1}{2}|y|, \frac{1}{2}|x| + 0\right\} \overset{|x|,|y|\leq 1}{\leq} \frac{1}{2}\,. \qquad \textbf{(3P)}$$

Man kann also $\lambda = \dfrac{1}{2}$ wählen und der Fixpunktsatz von Banach liefert die Behauptung. **(1P)**

b) Variante 1: Die a-priori-Abschätzung liefert:

$$\begin{aligned}
\|z_n - \overline{z}\|_\infty &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,\|f(z_0) - z_0\|_\infty \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \left\| f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \left\|\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}\right\|_\infty = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{3}{2^{n+1}} \overset{!}{\leq} \frac{1}{1000} =: \varepsilon
\end{aligned}$$

Wähle also n so, dass die Ungleichung $\overset{!}{\leq}$ erfüllt ist, also

$$1500 \overset{!}{\leq} 2^n$$

Wegen $2^{10} = 1024 < 1500 < 2^{11} = 2048$ genügt $M = 11$.
Punkteaufteilung:
1P: allgemeine Formel der a-priori-Abschätzung
1P: Norm $\|f(z_0) - z_0\|_\infty = \frac{3}{4}$ oder ≤ 1, korrekt berechnet oder abgeschätzt
1P: a-priori $\overset{!}{\leq} \varepsilon$, nicht $\overset{!}{=} \varepsilon$ und schon gar nicht $\overset{!}{\geq} \varepsilon$
1P: Wahl von M

Variante 2: Benutze fertige Formel aus der Vorlesung

$$n \overset{!}{\geq} \frac{\log\left(\frac{(1-\lambda)\cdot\varepsilon}{\|f(z_0)-z_0\|_\infty}\right)}{\log\lambda} = \frac{\log\left(\frac{1}{2\cdot 1000\cdot\frac{3}{4}}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \log_2(1500)$$

Wegen $2^{10} = 1024 < 1500 < 2^{11} = 2048$ genügt $M = 11$.
Punkteaufteilung:
1P: allgemeine nach n aufgelöste a-priori-Abschätzung
1P: Norm $\|f(z_0) - z_0\|_\infty = \frac{3}{4}$ oder ≤ 1, korrekt berechnet oder abgeschätzt
2P: Weitere Vereinfachung und Wahl von M

Aufgabe I.2: **(6+7 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $z(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$z' + 3x^2 z = -x^2 .$$

b) Finden Sie alle Lösungen $y(x)$ der Riccati-Differentialgleichung

$$y' + \left(\frac{6}{x} - 3x^2\right) y - x^2 y^2 = -\frac{9}{x} .$$

<u>Tipp:</u> Finden Sie zunächst eine spezielle Lösung mit dem Ansatz $y_s(x) = ax^{-3}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Wir wählen den Ansatz der *Variation der Konstanten*,
d.h. $z(x) = C(x)\, e^{-A(x)}$, (**1P** für Ansatz/Form der Lösung bzw. finale Lösung nach Rechnung)
welcher auf folgende Integrale führt:

$$A(x) = \int 3x^2\, dx = x^3 , \qquad (\textbf{1P} \text{ Formulierung} + \textbf{1P} \text{ korrekte Stammfkt.})$$

$$C(x) = c + \int -x^2 e^{x^3}\, dx = c - \frac{1}{3} e^{x^3} . \qquad (\textbf{1P} \text{ Formulierung} + \textbf{2P} \text{ korrekte Stammfkt.})$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$z(x) = c\, e^{-x^3} - \frac{1}{3} , \quad c \in \mathbb{R} .$$

<u>Alternativwegbepunktung:</u> Zerlegung $z = z_{\mathsf{hom}} + z_{\mathsf{part}}$, (**1P**)
mit $z_{\mathsf{hom}}(x) = c\, e^{-A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$, wobei $A(x) = \int 3x^2\, dx = x^3$, (**2P**)
und $z_{\mathsf{part}} = -\frac{1}{3}$ geraten und überprüft, (**2P**)
schließlich finale Lösung angegeben. (**1P**)

b) Der Ansatz $y_s(x) = ax^{-3}$ liefert eingesetzt in die Riccati-DGL:

$$-\frac{3a}{x^4} + \left(\frac{6a}{x^4} - \frac{3a}{x}\right) - \frac{a^2}{x^4} = -\frac{9}{x} \qquad \textbf{(1P)}$$

Diese Gleichung ist für $a = 3$ erfüllt, $y_s(x) = 3x^{-3}$ ist also eine spezielle Lösung. **(1P)**
Der Ansatz $y(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{1}{z(x)}$ **(1P)**
führt gemäß der Formel aus der Vorlesung auf

$$z' - \left[\left(\frac{6}{x} - 3x^2\right) + 2 \cdot (-x^2) \cdot \frac{3}{x^3}\right] z = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad z' + 3x^2 z = -x^2 .$$

Alternativ: Mit $y' = -9x^{-4} - z^{-2} z'$ und Einsetzen in die DGL ergibt sich

$$-\frac{9}{x^4} - \frac{z'}{z^2} + \left(\frac{6}{x} - 3x^2\right)\left(\frac{3}{x^3} + \frac{1}{z(x)}\right) - x^2 \left(\frac{3}{x^3} + \frac{1}{z(x)}\right)^2 = -\frac{9}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{9}{x^4} - \frac{z'}{z^2} + \frac{18}{x^4} + \frac{6}{xz} - \frac{9}{x} - \frac{3x^2}{z} - \frac{9}{x^4} - \frac{6}{xz} - \frac{x^2}{z^2} = -\frac{9}{x}$$

$$\Leftrightarrow z' + 3x^2 z = -x^2$$

(**2P** für Gewinnung der linearen DGL in z)
Für z gilt demnach die Differentialgleichung aus dem vorherigen Aufgabenteil.
Wir erhalten also weitere Lösungen

$$y(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{1}{c\, e^{-x^3} - \frac{1}{3}} , \qquad c \in \mathbb{R} .$$

(**2P** für Lösung von z, etwas durch Verweis auf a), sowie die *weiteren* Lösungen für y.)

Aufgabe I.3: **(2+7+5 Pkt.)**

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei das folgende Vektorfeld gegeben:

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x(z-y)+1 \\ y(x-z)+2 \\ z(y-x)+3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ gilt.

b) Es sei die reguläre orientierbare Oberfläche $N \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\, z=0\}.$$

Die Fläche N sei so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor eine nichtnegative z-Komponente aufweist.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_N \boldsymbol{v} \cdot do$.

c) Es sei nun eine weitere reguläre orientierbare Oberfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^8 = 1,\, z \ge 0\}.$$

Die Fläche M sei auch so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor eine nichtnegative z-Komponente aufweist.
Begründen Sie, dass $\displaystyle\int_M \boldsymbol{v} \cdot do = \int_N \boldsymbol{v} \cdot do$ gilt.
(Dazu ist kein weiteres Oberflächenintegral explizit auszurechnen.)

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Es gilt $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \underline{(z-y)+(x-z)+(y-x)} = 0$.
(**2P**, wenn Zwischenschritte angegeben, insbesondere der unterstrichene Ausdruck. Anstatt der allgemeinen Divergenzformel ist auch $\partial_x\big(x(z-y)+1\big) + \partial_y\big(y(x-z)+2\big) + \partial_z\big(z(y-x)+3\big)$ ein zulässiger Zwischenschritt. Die Anwendung der Divergenzformel muss deutlich werden.)

b) <u>Polarkoordinaten-Variante:</u> Wir parametrisieren N mittels Polarkoordinaten in der xy-Ebene (bzw. Zylinderkoordinaten mit abhängiger z-Koordinate $z = z(r,\varphi) = 0$):

$$\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi]. \qquad \textbf{(2P)}$$

Wir wissen, dass $D_r\phi \times D_\varphi\phi = r \cdot (0,0,1)^\top$ gilt, **(1P)**
wobei die z-Komponente (wie gewünscht) positiv ist. **(1P)**
Wir haben also

$$\int_N \boldsymbol{v} \cdot do = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \boldsymbol{v}(\phi(r,\varphi)) \cdot (0,0,r)^\top \, dr\, d\varphi = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} v_3(\phi(r,\varphi)) \cdot r \, dr\, d\varphi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0+3)\, r\, dr\, d\varphi = 3\, \frac{r^2}{2}\bigg|_0^1 \cdot 2\pi = 3\pi\,.$$

(**3P**: Darstellung als parametrisiertes Integral, skalarer Integrand $3r$, verbliebene Integrale.)

<u>Kartesische Parametrisierung:</u> Da N in der (x,y)-Ebene liegt, können wir die kartesischen Koordinaten (x,y) als natürliche Parameter wählen, $(x,y) \in N' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, der Normaleneinheitsvektor $(0,0,1)^\top$ hat die gewünschte Orientierung.
(**3P** für Parameterwahl und -bereich, sowie Orientierung.)

Es gilt:

$$\int_N \boldsymbol{v} \cdot do = \int_{N'} \boldsymbol{v}(x,y,0) \cdot (0,0,1)^\top \, d(x,y) = \int_{N'} v_3(x,y,0)\, d(x,y)$$
$$= \int_{N'} (0+3)\, d(x,y) = 3F(N') = 3\pi\,.$$

(**4P**: Darstellung als parametrisiertes Integral, skalarer Integrand 3, als $3 \cdot$ (Fläche von N') erkannt, bekannter Flächeninhalt $F(N') = \pi$ der Kreisscheibe N'.)

c) *Standardweg mit Gauß:* Wir betrachten das durch M und N berandete reguläre Gebiet

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^8 \leq 1\}\,,$$

(**1P**, Beschreibung in Worten, Formeln oder Skizze.)
Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{v} \cdot do = \int_D \underbrace{\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x)}_{=0}\, dx = 0\,,$$

wobei die Oberfläche ∂D nach außen orientiert sei. Mengenmäßig setzt sich ∂D aus den beiden (regulären) Flächenstücken M und N zusammen, wobei N falsch herum (d.h. nach innen) orientiert ist, also gilt

$$0 = \int_{\partial D} \boldsymbol{v} \cdot do = \int_M \boldsymbol{v} \cdot do - \int_N \boldsymbol{v} \cdot do\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

(**2P** für Anwendung von Gauß mit $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$,
2P Zusammenhang der Orientierung von ∂D mit der von M und insbes. N, Bilanzformel.)

Alternativweg mit Stokes: Das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, zudem ist $\mathbb{R}^3$ ein- und zweifach zusammenhängend / sternförmig / konvex. Also existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{w}$ mit $\operatorname{rot} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$. (**2P** für diesen Ansatz $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ zu verwenden)
Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_M \boldsymbol{v} \cdot do = \int_{\partial M} \boldsymbol{w} \cdot ds \qquad \text{sowie} \qquad \int_N \boldsymbol{v} \cdot do = \int_{\partial N} \boldsymbol{w} \cdot ds\,. \qquad \textbf{(1P)}$$

Die Ränder $\partial M = \partial N = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ stimmen mengenmäßig überein. Da sowohl M als auch N mit positiver z-Komponente der Flächennormale orientiert sind, stimmt auch der Umlaufsinn von ∂M und ∂N überein, also sind die Integrale gleich. **(2P)**

Teil II

Aufgabe II.1: **(11 Pkt.)**

Betrachten Sie die Ellipse

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. Als stetige Funktion nimmt f auf der kompakten Menge E Minimum und Maximum an. Geben Sie den Punkt auf E an, in dem f maximal wird!

Hinweis: Wenden Sie das Lagrange-Verfahren an.

Ergebnis:
$\left(\frac{24}{5}, \frac{36}{5}\right)$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden): Die Nebenbedingung lässt sich als $g(x, y) = 0$ schreiben, wobei

$$g(x, y) = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} - 1. \qquad \textbf{(1P)}$$

Mit der Lagrange-Bedingung $\nabla f = \lambda \nabla g$, wobei λ den Lagrangemultiplikator bezeichnet, erhalten wir nun

$$1 = \lambda \frac{2}{9}(x-3) \qquad \text{und} \qquad 1 = \lambda \frac{1}{8}(y-4) . \qquad \textbf{(2P)} \tag{1}$$

Auflösen (in jeder Variante bis zu **6P**):

Variante 1: Gleichsetzen von (1) und Division durch $\lambda \neq 0$ liefert nun

$$\frac{2}{9}(x-3) = \frac{1}{8}(y-4) . \qquad \textbf{(1P)} \tag{2}$$

Quadrieren wir dies und bringen die Konstanten auf eine Seite,

$$(x-3)^2 = \frac{9^2}{16^2}(y-4)^2 ,$$

können wir eine Variable in der Nebenbedingung eliminieren:

$$\frac{9}{16}\frac{(y-4)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{25}{16} \cdot \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = 4 \pm \frac{16}{5} .$$

und erhalten $y_1 = \frac{4}{5}$ und $y_2 = \frac{36}{5}$ als y-Koordinaten für mögliche kritische Punkte. **(3P)**

Wir können (2) auch nach x auflösen,

$$x = 3 + \frac{9}{16}(y-4) \quad \left[= \frac{9}{16}\, y + \frac{3}{4} \right] ,$$

und erhalten nach Einsetzen von $y_{1,2}$ entsprechende x-Koordinaten, und zwar

$$x_{1,2} = 3 \pm \frac{9}{5} .$$

Wir haben also zwei kritische Punkte $(x_1, y_1) = (\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ und $(x_2, y_2) = (\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$. **(2P)**

Alternativ: Zunächst $x_{1,2}$ über Nebenbedingungen, dann $y_{1,2}$ durch Auflösen von (2).

Variante 2: Mittels (1) ersetzen wir $(x-3) = \frac{9}{2\lambda}$ und $(y-4) = \frac{8}{\lambda}$ in der Nebenbedingung,

$$1 \overset{!}{=} \frac{9}{4\,\lambda^2} + \frac{16}{4\,\lambda^2} = \frac{25}{4\,\lambda^2}\,,$$

und erhalten so die Lagrangemultiplikatoren in den kritischen Punkten:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{5}{2}\,. \qquad \textbf{(4P)}$$

Dies liefert

$$x_{1,2} = 3 + \frac{9}{2\,\lambda_{1,2}} = 3 \pm \frac{9}{5} \qquad \text{und} \qquad y_{1,2} = 4 + \frac{8}{\lambda_{1,2}} = 4 \pm \frac{16}{5}\,.$$

Wir haben also zwei kritische Punkte $(x_1, y_1) = (\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ und $(x_2, y_2) = (\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$. **(2P)**

Einsetzen liefert $f(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}) = 2 < f(\frac{24}{5}, \frac{36}{5}) = 12$. Da nach Vorraussetzung Minimum und Maximum angenommen werden, liegt in $(\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$ (Lsg. A) ein Maximum vor, und in $(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ (Lsg. B) ein Minimum. (**2P** für Berechnen der Funktionswerte und Auswahl der gefragten Stelle unter (impliziter) Voraussetzung der Existenz von Minimum und Maximum; alternativ eine geometrische Begründung.)

Aufgabe II.2: **(8 Pkt.)**

Die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ mit

$$F(x, y, z) = (x + y)^2 - 5x \cos z - 2y\, e^z$$

ist lokal um $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)$ auflösbar als stetig differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Dg(1, 2)$ von g in diesem Punkt.
(Die lokale Auflösbarkeit von $F(x, y, z) = 0$ um $\boldsymbol{a}$ als stetig differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$ darf als bekannt vorausgesetzt werden und muss nicht mehr eigens gezeigt werden.)

Ergebnis:
$\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):
Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = (2(x + y) - 5 \cos z, 2(x + y) - 2\, e^z) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{a}) = (1, 4)\,. \qquad \textbf{2P+2P}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = +5x \sin z - 2y\, e^z \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{a}) = -4\,. \qquad \textbf{1P+1P}$$

Mithilfe des Satzes von der Impliziten Funktion erhalten wir:

$$Dg(1, 2) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \left(\frac{1}{4}, 1\right)\,.$$

(**2P** Wenn Anwendung des Satzes der Impliziten Funktion erkennbar und Ergebnis stimmt.)

Aufgabe II.3: **(11 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \log(2x^2 + y)$, wobei $\log$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Geben Sie $T_{2,f,\boldsymbol{a}}(1,2)$ an, wobei $T_{2,f,\boldsymbol{a}}$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{a} := (0,1)$ sei!

Ergebnis:
$\frac{5}{2}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Standardweg über partielle Ableitungen:

$$f = \log(2x^2 + y)$$
$$\partial_x f = \frac{4x}{2x^2 + y}\,, \quad \partial_y f = \frac{1}{2x^2 + y}$$
$$\partial_x^2 f = \frac{4 \cdot (2x^2 + y) - 4x \cdot 4x}{(2x^2 + y)^2} = \frac{4y - 12x^2}{(2x^2 + y)^2}\,, \quad \partial_x \partial_y f = -\frac{4x}{(2x^2 + y)^2}\,, \quad \partial_y^2 f = -\frac{1}{(2x^2 + y)^2}$$

(**1P** für BEIDE richtige erste Ableitungen, **3P** für die zweiten partiellen Ableitungen)

Einsetzen des Entwicklungspunktes $\boldsymbol{a} = (0,1)$ liefert konkret

$$f(\boldsymbol{a}) = \log(1) = 0$$
$$\partial_x f(\boldsymbol{a}) = 0\,, \quad \partial_y f(\boldsymbol{a}) = 1$$
$$\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) = 4\,, \quad \partial_x \partial_y f(\boldsymbol{a}) = 0\,, \quad \partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) = -1$$

(An dieser Stelle gibt es [noch] keine Punkte.)

Damit lässt sich das Taylorpolynom aufstellen:

$$\begin{aligned} T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x,y) &= \sum_{i+j \le 2} \frac{x^i (y-1)^j}{i! \cdot j!}\, \partial_x^i \partial_y^j f(\boldsymbol{a}) \\ &= 1 \cdot (y-1) + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2} = (y-1) + 2x^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2\,. \end{aligned}$$

(**6P** Oben berechnete Terme in richtige Taylorformel einsetzen.
Pro Term in Taylorformel gibt es einen Punkt: 1 für den konstanten Term, 2 für die linearen und 3 für die quadratischen Terme. Bei falschem Entwicklungspunkt gibt es keine Punkte.)

Damit erhalten wir

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x,y)(1,2) = (2-1) + 2 - \frac{(2-1)^2}{2} = \frac{5}{2}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Weg über log-Potenzreihe: Der Logarithmus lässt sich um den Entwicklungspunkt 1 als Potenzreihe schreiben, für $|z| < 1$ gilt

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \ldots \qquad \textbf{(3P)}$$

Im konkreten Fall der Anwendung auf f ist $z = 2x^2 + (y-1)$, wobei $z = 0$ für $(x, y) = \boldsymbol{a}$, wir erhalten

$$\begin{aligned} \log(2x^2 + y) =& \log(1 + (2x^2 + (y-1))) \\ =& \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x^2 + (y-1))^k}{k} \\ =& (2x^2 + (y-1)) - \frac{(2x^2 + (y-1))^2}{2} + \ldots \end{aligned}$$

(**5P**, zweidim. Entwicklungspunkt $(x, y) = \boldsymbol{a}$ in Beziehung zu eindim. Entwicklung um $z = 0$ setzen, insbes. mit $(y-1)$ statt y, alternierende Reihe, Vorfaktoren.)
Um das Taylorpolynom zweiter Ordnung zu erhalten, berücksichtigen wir die Terme von *höchstens zweiter Ordnung* (**1P**), d.h.

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x, y) = 2x^2 + (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Damit erhalten wir

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x, y)(1, 2) = 2 + (2-1) - \frac{(2-1)^2}{2} = \frac{5}{2}. \qquad \textbf{(1P)}$$

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie das Integral

$$I := \iiint\limits_K x \, d(x,y,z)$$

für den Körper

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^2,\ z \leq 1 \right\}.$$

<u>Hinweis:</u> Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten!

Ergebnis:
$\frac{1}{21}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Transformation: Nutzen Zylinderkoordinaten $(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ mit $d(x,y,z) = r\, d(r,\varphi,z)$.
(**2P** für Parametrisierung erkennbar und Funktionaldeterminante berücksichtigt.)

Bereichsgrenzen: Die Bedingung $x, y \geq 0$ impliziert $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. **(1P)**

Außerdem lassen sich $z \in [0,1]$ und $r \in [0, z^2]$ direkt aus der Beschreibung von K ablesen. (**2P**)

Finale Rechnung: Mit $x = r\cos\varphi$ berechnet sich das Integral zu

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 \left[\int_0^{z^2} r^2\, dr \right] dz = 1 \cdot \int_0^1 \frac{z^6}{3}\, dz = \frac{1}{3\cdot 7} = \frac{1}{21}.$$

(**2P** für richtige Schachtelung und Integranden,
3P für Rechnung und Ergebnis, insbes. die 3 eindimensionalen Integrale.)

<u>Alternative Schachtelung</u> mit $r \in [0,1]$ und $z \in [\sqrt{r}, 1]$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \left[\int_{\sqrt{r}}^1 dz \right] dr = 1 \cdot \int_0^1 (r^2 - r^{5/2})\, dr = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}.$$

<u>Alternativwege über Normalbereiche in Kartesischen Koordinaten:</u>

$$\int_0^1 \left(\int_0^{z^2} \left(\int_0^{\sqrt{z^4-y^2}} x\, dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{z^2} \frac{z^4 - y^2}{2}\, dy \right) dz = \int_0^1 \left(\frac{z^4}{2} \cdot z^2 - \frac{(z^2)^3}{6} \right) dz$$
$$= \int_0^1 \frac{z^6}{3}\, dz = \frac{1}{3\cdot 7} = \frac{1}{21}.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{z^2} x \left(\int_0^{\sqrt{z^4-x^2}} dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{z^2} x\sqrt{z^4 - x^2}\, dx \right) dz = \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(z^4 - x^2)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=z^2} dz$$
$$= \int_0^1 \frac{z^6}{3}\, dz = \frac{1}{3\cdot 7} = \frac{1}{21}.$$

Hierbei **5P** für Normalbereichsgrenzen, Schachtelung, Integranden,
5P für Auflösung der etwas komplizierteren eindimensionalen Integrale.

Alternativweg über angepasse Parametrisierung: Mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(t,\varphi,z) = \begin{pmatrix} t\,z^2\cos\varphi \\ t\,z^2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2P)}$$

können wir die Parameter (t,φ,z) über das Rechtecksgebiet $[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$ integrieren. **(3P)**
Die Funktionaldeterminante berechnet sich zu

$$|\det(D\Phi)| = \det\begin{pmatrix} z^2\cos\varphi & -t\,z^2\sin\varphi & 2\,t\,z\cos\varphi \\ z^2\sin\varphi & t\,z^2\cos\varphi & 2\,t\,z\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = t\,z^4\,, \qquad \textbf{(2P)}$$

Mit $x = t\,z^2\cos\varphi$ folgt

$$I = \int_0^1 t^2\,dt\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 z^6\,dz = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}\,.$$

(Hier **1P** Integrand, **2P** für Rechnung.)

Informationen zur Bewertung:

- r und z werden unabhängig voneinander auf $[0,1]$ integriert.
  In diesem Fall sind die Varianten A & B nicht mehr voneinander unterscheidbar, das Ergebnis ist $\frac{1}{3}$, es werden pauschal **6/10P** vergeben, um folgende Mängel zu berücksichtigen:
  - z-Abhängigkeit des Integrationsbereiches für r fehlt
  - Schachtelung unzulässig vereinfacht
  - Integral bzgl. r vereinfach wegen leichterer Grenzen
  - Integral bzgl. z ist nur noch Integral über Konstante, viel einfacher!
- Fälschlicherweise wird $0\le r\le z$ angenommen.
  Ist sonst alles richtig, sollte $\frac{1}{12}$ herauskommen, was noch **9/10P** liefert.
- φ wird über die volle Periode integriert, und zwar von 0 bis 2π.
  Wurden alle anderen Integrale berechnet, ansonsten alles richtig geschachtelt, und erst am Ende der Faktor 0 aus $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$ einbezogen, so kann man noch (je nachdem wieviel fehlt) bis zu **9/10P** bekommen. Ist das Integral bis auf die eine Integrationsgrenze korrekt aufgestellt, spart man sich dann aber die Integration bzgl. r und z, so gibt es noch höchstens **7/10P**.
- Die Funktionaldeterminante wird vergessen, man integriert also $r\cos\varphi$.
  Man sollte dann in Variante A den Wert $\frac{1}{10}$ bekommen, wofür es dann noch **9/10P** gäbe.
- $\cos\varphi$ wird im Integranden vergessen.
  Das Ergebnis multipliziert sich mit $\frac{\pi}{2}$, man könnte dann noch maximal **9/10P** bekommen.
- In der alternativen Schachtelung mit $\int\ldots dz$ als inneres Integral:
  Nimmt man $0\le z\le\sqrt{r}$ statt $\sqrt{r}\le z\le 1$, so sollte man in Variante A den Wert $\frac{2}{7}$ bekommen. Da der Integrand bzgl. r dann noch nur einen Summanden hat, wird die Rechnung vereinfacht, weshalb nun höchstens **8/10P** vergeben werden.
- Versuche von Parametrisierungen in Kugelkoordinaten werden nicht berücksichtigt, da sie ungeeignet sind.
- Formulierungen von Flächenintegralen werden nicht berücksichtigt, weil so die Aufgabe nicht verstanden wurde.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\boldsymbol{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 4x^3y^2z \\ 2x^4yz \\ x^4y^2 \end{pmatrix}$.
Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $\boldsymbol{v}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt die Differentialgleichung

$$a\,y + b\,y^{(4)}(x) + y^{(7)}(x) = 0$$

eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Dabei bezeichne $y^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung der Funktion y in x.)

c) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

besitzt genau eine Lösung.

d) Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und beschränkt. Dann nimmt jede beliebige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf D ihr Maximum an.

e) Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer und kompakter Körper. Der Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n}(x)$, $x \in \partial K$, zeige nach außen. Ferner sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\partial K} \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \cdot do = 0.$$

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a) W	$\mathbb{R}^3$ ist sternförmig/einfach zusammenhängend, wir prüfen die Integrabilitätsbedingungen: $$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 8x^3yz = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \textbf{ (1P)} \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 4x^3y^2 = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \textbf{ (1P)} \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = 2x^4y = \frac{\partial v_3}{\partial y}. \textbf{ (1P)}$$ Also gibt es besagtes f mit $\nabla f = \boldsymbol{v}$. Alternativ: Mit $f(x,y,z) := x^4y^2z$ gilt $\boldsymbol{v} = \nabla f$. **(3P)**
b) W	Einsetzen von $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung liefert $$ae^{\lambda x} + b\lambda^4 e^{\lambda x} + \lambda^7 e^{\lambda x} = 0 \overset{e^{\lambda x}\neq 0}{\Longleftrightarrow} a + b\lambda^4 + \lambda^7 = 0 \qquad \textbf{(1P)}$$ Nun ist $a + b\lambda^4 + \lambda^7$ ein reelles Polynom von ungeradem Grad, es besitzt also nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine reelle Nullstelle λ. Dann ist $x \mapsto e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. **(2P)**
c) F	In der Tat lösen sowohl $y \equiv 0$ **(1P)** als auch $y(x) := \frac{x^3}{27}$ **(2P)** das Anfangswertproblem.
d) F	Es sei bespielsweise $D := [0,1]^2$ und $f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ **(2P)** D ist abgeschlossen und beschränkt und die Funktion f ist nicht nach oben beschränkt, nimmt also ihr Supremum (∞) nicht an. **(1P)** **Hinweis:** *Ein Verweis auf die Nichterfüllung der Voraussetzungen des Satzes von Weierstraß bringt* **keine Punkte**, *hier ist ein Gegenbeispiel erforderlich!*
e) W	Variante 1: Nach dem *Satz von Gauß* **(1P)** gilt $$\int_{\partial K} \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \cdot do \overset{\textbf{(1P)}}{=} \int_K \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{v})) \cdot dx = 0\,,$$ denn es gilt $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0$. **(1P)** Variante 2: $\partial K =: S$ als geschlossene Fläche besitzt keine Randkurve, $\partial S = \emptyset$. **(1P)** Nach dem Satz von Stokes **(1P)** gilt $$\int_{\partial K} \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \cdot do = \int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \cdot do \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot ds = \int_{\emptyset} \boldsymbol{v} \cdot ds = 0 \qquad \textbf{(1P)}$$

Für jede Aufgabe gibt es **1P** auf die richtige Antwort (W oder F),
sowie **3P** für eine vollständige Begründung.