Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 01.02.2020

Klausur zur Mathematik III

WS 2019/20

Variante B

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(9+4 Pkt.)**

Betrachten Sie den vollständigen normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\,.\,\|_\infty)$, wobei $\|(x,y)^\top\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ die Maximumsnorm bezeichnet, und die Funktion

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y^2 - 3 \\ x^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(Dabei sei $[-1,1]^2$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ebenfalls mit der Maximumsnorm versehen.)

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion f genau einen Fixpunkt $\overline{z} \in [-1,1]^2$ besitzt. Zeigen Sie dafür unter anderem, dass $\lambda = 1/2$ als Lipschitzkonstante von f bezüglich der Maximumsnorm gewählt werden kann.

b) Sei $z_0 = (0,0)^\top$ gegeben als Startwert der Fixpunktiteration $z_{n+1} := f(z_n)$. Wie viele Iterationen M sind gemäß der a-priori-Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes ausreichend, um

$$\|z_n - \overline{z}\|_\infty \leq 1/1000$$

für alle $n \geq M$ zu garantieren? (Hinweis: $2^{10} = 1024$.)

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(6+7 Pkt.)**

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $z(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$z' + 3x^2 z = -x^2 \,.$$

b) Finden Sie alle Lösungen $y(x)$ der Riccati-Differentialgleichung

$$y' + \left(\frac{6}{x} - 3x^2\right) y - x^2 y^2 = -\frac{9}{x} \,.$$

Tipp: Finden Sie zunächst eine spezielle Lösung mit dem Ansatz $y_s(x) = ax^{-3}$.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(2+7+5 Pkt.)**

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei das folgende Vektorfeld gegeben:

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x(z-y)+1 \\ y(x-z)+2 \\ z(y-x)+3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ gilt.

b) Es sei die reguläre orientierbare Oberfläche $N \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0\}.$$

Die Fläche N sei so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor eine nichtnegative z-Komponente aufweist.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_N \boldsymbol{v} \cdot do$.

c) Es sei nun eine weitere reguläre orientierbare Oberfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^8 = 1,\, z \geq 0\}.$$

Die Fläche M sei auch so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor eine nichtnegative z-Komponente aufweist.
Begründen Sie, dass $\displaystyle\int_M \boldsymbol{v} \cdot do = \int_N \boldsymbol{v} \cdot do$ gilt.
(Dazu ist kein weiteres Oberflächenintegral explizit auszurechnen.)

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(11 Pkt.)**

Betrachten Sie die Ellipse

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. Als stetige Funktion nimmt f auf der kompakten Menge E Minimum und Maximum an. Geben Sie den Punkt auf E an, in dem f minimal wird!

Hinweis: Wenden Sie das Lagrange-Verfahren an.

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: **(8 Pkt.)**

Die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ mit

$$F(x, y, z) = (x + y)^2 - 2x\cos z - 5y\, e^z$$

ist lokal um $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)$ auflösbar als stetig differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Dg(2, 1)$ von g in diesem Punkt.
(Die lokale Auflösbarkeit von $F(x, y, z) = 0$ um $\boldsymbol{a}$ als stetig differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$ darf als bekannt vorausgesetzt werden und muss nicht mehr eigens gezeigt werden.)

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: **(11 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \log(3x^2 + y)$, wobei $\log$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Geben Sie $T_{2,f,\boldsymbol{a}}(1, 2)$ an, wobei $T_{2,f,\boldsymbol{a}}$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{a} := (0, 1)$ sei!

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie das Integral

$$I := \iiint\limits_K x \, d(x,y,z)$$

für den Körper

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^3,\ z \leq 1 \right\} .$$

Hinweis: Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten!

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und beschränkt. Dann nimmt jede beliebige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf D ihr Maximum an.

b) Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer und kompakter Körper. Der Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n}(x)$, $x \in \partial K$, zeige nach außen. Ferner sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\partial K} \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \cdot do = 0.$$

c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt die Differentialgleichung

$$a\, y + b\, y^{(4)}(x) + y^{(7)}(x) = 0$$

eine Lösung der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Dabei bezeichne $y^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung der Funktion y in x.)

d) Es sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\boldsymbol{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 4x^3y^2z \\ 2x^4yz \\ x^4y^2 \end{pmatrix}$.
Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $\boldsymbol{v}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

e) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

besitzt genau eine Lösung.

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	