Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 23.07.2020

Wiederholungsklausur zur Mathematik III

SoSe 2020

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(2+4+3+3 Pkt.)**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^2\,(x-y)}{x^2+y^2} \qquad \text{für} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) Begründen Sie, dass f in $(0,0)$ *nicht* total differenzierbar ist.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.2: **(6+8 Pkt.)**

Betrachten Sie die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ auf der Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0,\ xy \geq 1\}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{y}{4x + y^2}.$$

a) Begründen Sie, warum $\sup\limits_{(x,y)\in B} f(x, y) = \sup\limits_{(x,y)\in \partial B} f(x, y)$ gilt, wobei ∂B den Rand von B bezeichne.

b) Bestimmen Sie das Supremum von f auf ∂B.

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe I.3: **(2+8+4 Pkt.)**

In $\mathbb{R}^3$ seien die orientierten Oberflächen $S_1,\ S_2$ sowie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ gegeben. Die Flächen S_1 und S_2 seien so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor jeweils eine nichtnegative z-Komponente aufweist.

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(1-z)^4 = 1,\ z \leq 1\}, \\ S_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z = 1\}, \\ \boldsymbol{v}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\iint\limits_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$, indem Sie das Integral mithilfe eines geeigneten Integralsatzes auf ein orientiertes Kurvenintegral zurückführen.

c) Begründen Sie, warum die Integrale $\displaystyle\iint\limits_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$ und $\displaystyle\iint\limits_{S_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$ für jede Wahl des zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ übereinstimmen müssen.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil II

Aufgabe II.1: **(9 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z,w) \\ F_2(x,y,z,w) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w + z\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} - 1 \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix} .$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert lokal um $\boldsymbol{a} = (\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{e}}{6}, \frac{5}{6})$ eine stetig partiell differenzierbare Auflösung der Gleichung $F(x,y,z,w) \overset{!}{=} 0$ von der Form

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = G(x,y) = \begin{pmatrix} G_1(x,y) \\ G_2(x,y) \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right) .$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.2: **(11 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \mathrm{e}^{x^2+3y-1}$. Geben Sie $T_{2,f,\boldsymbol{a}}(2,1)$ an, wobei $T_{2,f,\boldsymbol{a}}$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{a} := (1,0)$ sei!

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.3: **(5+5 Pkt.)**

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\cos^2(y)\,, \qquad y(1) = \pi.$$

Tipp: $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' = 2x + 1.$$

Ergebnis:	
a)	b)

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ 0 < z\sqrt{x^2 + y^2} < y \right\} .$$

Ergebnis:

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\boldsymbol{v}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}$.
Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\boldsymbol{v}(x,y) = \nabla f(x,y)$.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 1$ und $f(\boldsymbol{x}) > \|\boldsymbol{x}\|_2$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{x}\|_2 \geq 1$. Dann gibt es ein $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

c) Das Anfangswertproblem

$$y' = |y|^{4/5}, \quad y(0) = 0$$

besitzt genau eine Lösung.

d) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2xy + y^2 + 1 \\ 2xy + x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

besitzt auf dem abgeschlossenen Gebiet $D := [0,1]^2$ genau einen Fixpunkt.

e) Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Körper. Der Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \partial K$, zeige nach außen. Ferner sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beliebig oft differenzierbar und es gelte für alle $\boldsymbol{x} \in K$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) > 0.$$

Dann gilt

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} > 0.$$

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1

Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	