Lehrstuhl für Mathematik
der Informationsverarbeitung
Prof. Dr. Holger Rauhut

Aachen, den 23.07.2020

Wiederholungsklausur zur Mathematik III

SoSe 2020

Name	Matrikelnr.

Hinweise

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind **handschriftliche** Aufzeichnungen von maximal **zwei** DIN-A4-Blättern. Fotokopien oder Ausdrucke von handschriftlichen Aufzeichnungen sind **nicht** zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches und andere elektronische Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.

Bewertung:
Es gibt drei Typen von Aufgaben. Die einzelnen Teile werden wie folgt bewertet:

I: (Aufgaben I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar und begründet zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte. Nutzen Sie für die Lösungen von diesem Teil die zugehörigen Blätter des Antwortbogens.

II: (Aufgaben II.1-II.4) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende Kästchen des Antwortbogens für diesen Teil eintragen. Darüber hinaus können Sie unter ,,Lösungsweg" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein. Es werden nur die Einträge auf der jeweiligen Seite dieses Antwortbogens bewertet.

III: (Aufgabe III.1) Hier müssen Sie Aussagen Wahrheitswerte zuordnen. Die Antworten müssen begründet werden. Für die richtige Antwort gibt es pro Aussage einen Punkt und für eine richtige Begründung drei Punkte. Es gibt keine Minuspunkte.
Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen zu diesem Teil stehen!

Die Blätter des Antwortbogens dürfen beidseitig beschrieben werden.

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(2+4+3+3 Pkt.)**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^2\,(x-y)}{x^2+y^2} \qquad \text{für} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) Begründen Sie, dass f in $(0,0)$ *nicht* total differenzierbar ist.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) (Es reicht jeweils eine Darstellung. Die Partielle Ableitung nach y steht nur der Vollständigkeit halber da.)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2-2xy)\cdot(x^2+y^2) - x^2(x-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \textbf{2P}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2\cdot(x^2+y^2) - x^2(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4-2x^3y+x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(y^2-2xy-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Wir berechnen die Richtungsableitung über den Differenzenquotienten in $\mathbf{0} = (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{0}+h\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h\boldsymbol{v})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3h)^2\cdot(3h-4h)}{5^3\cdot\|h\boldsymbol{v}\|^2\cdot h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3^2h^3}{5^3\cdot h^3} = -\frac{9}{125},$$

wobei wir auch genutzt haben, dass $\boldsymbol{v}$ normiert ist.
(**1P** Ansatz Differenzenquotient, **3P** für Rechnung und Ergebnis.)

c) Da der analytische Ausdruck von f nur außerhalb von $(0,0)$ gilt, müssen die partiellen Ableitungen über den Differenzenquotienten (**1P**) gebildet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x^3} = \lim_{x\to 0} 1 = 1. \qquad \textbf{1P}$$

Analog erhält man die partielle Ableitung nach y wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y^3} = 0. \qquad \textbf{1P}$$

d) Mit den in b) berechneten partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\langle \nabla f(0,0), \boldsymbol{v}\rangle = \langle (1,0), \boldsymbol{v}\rangle = \frac{3}{5} \neq \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = -\frac{9}{125}. \qquad \textbf{2P}$$

Für eine total differenzierbare Funktion f müssten beide Ausdrücke übereinstimmen. **1P**

Bemerkung: Dass die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ unstetig sind, reicht *nicht* um zu zeigen, dass f in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist, es ist aber immerhin ein Anhaltspunkt. Argumentationen über die Unstetigkeit der partiellen Ableitungen liefern maximal **1P**.

Aufgabe I.2: **(6+8 Pkt.)**

Betrachten Sie die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ auf der Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ xy \geq 1\}$, gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{y}{4x + y^2}.$$

a) Begründen Sie, warum $\sup\limits_{(x,y)\in B} f(x, y) = \sup\limits_{(x,y)\in\partial B} f(x, y)$ gilt, wobei ∂B den Rand von B bezeichne.

b) Bestimmen Sie das Supremum von f auf ∂B.

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Der Rand und das Innere von B sind gegeben durch

$$\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ xy = 1\} \quad \text{und} \quad \mathring{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}. \qquad \textbf{(2P}$$

Wir berechnen den Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{4y}{(4x+y^2)^2} \\ \frac{4x-y^2}{(4x+y^2)^2} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{2P}$$

Vollständige Begründung: Da $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) < 0$, ist $f(x, y)$ für festes $y > 0$ fallend in x. **1P**
Da $xy \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{y}$, wird dann $f(x, y)$ maximal für $x = \frac{1}{y}$, was auf dem Rand liegt. **1P**
Also formal:

$$\sup_{(x,y)\in B} f(x, y) = \sup_{(x,y)\in B} f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \sup_{y>0} f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \sup_{(x,y)\in\partial B} f(x, y) .$$

Unvollständige Begründung: Da $y \neq 0$ für alle $(x, y) \in B$, existieren offenbar keine kritischen Punkte $(x, y) \in \mathring{B}$ mit $\nabla f(x, y) = 0$.
(Maximal **1P** im vgl. zur vollständigen Begründung mit **2P**)

b) Auflösen nach y: Auf ∂B gilt die Bedingung

$$xy = 1 \qquad \iff \qquad x = \frac{1}{y}. \qquad \textbf{1P}$$

Durch Einsetzen erhalten wir die neue Zielfunktion

$$F(y) := f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{y}{4/y + y^2} = \frac{y^2}{4 + y^3}, \qquad \textbf{1P}$$

welche nur noch von einer Variablen abhängt. Es ist

$$F'(y) = -\frac{y(y^3 - 8)}{(4 + y^3)^2}. \qquad \textbf{1P}$$

Offenbar ist $y_0 = 2$ die einzige positive Nullstelle, der zugehörige x-Wert $1/2$, der Funktionswert

$$F(2) = f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{3}. \qquad \textbf{2P} \tag{1}$$

Also ist $y_0 = 2$ die einzige kritische Stelle von F. **1P**

Begründung, dass globales Maximum: Es ist $F'(y) > 0$ für $0 < y < 2$ und $F'(y) < 0$ für $y > 0$, also ist F vor $y_0 = 2$ steigend, danach fallend, und in y_0 liegt ein globales Maximum vor.
Alternativ über die zweite Ableitung: Wegen

$$F''(y) = \frac{2(y^6 - 28y^3 + 16)}{(y^3 + 4)^3}, \qquad \text{also} \qquad F''(2) = -\frac{1}{6} < 0,$$

handelt es sich bei 2 um ein striktes lokales Maximum von F, also muss in $(1/2, 2)$ ein globales Maximum von f vorliegen.
Alternativ über Grenzwerte auf ∂B:

$$\lim_{y \searrow 0} F(y) = \lim_{y \searrow 0} 0 = 0 < F(2)\,, \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to \infty} F(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{4/y^2 + y} = 0 < F(2)\,.$$

Also muss in $(1/2, 2)$ ein globales Maximum von f vorliegen.
Elementar mit Ungleichungen:

$$F(y) = \frac{y^2}{4 + y^3} \geq \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \geq y^3 - 3y^2 + 4 = (y-2)^2(y+1)$$

Wegen $(y+1) > 1 > 0$ ist dies offenbar nur für $y = 2$ erfüllt. Also ist $\frac{1}{3}$ tatsächlich das globale Maximum von F, d.h. von f auf ∂B.
(**2P** für eine der vier möglichen Begründungen.)

<u>Alternativ Auflösen nach x:</u> (Analoge Bepunktung)

$$xy = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{x}, \qquad F(x) := f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{1/x}{4x + 1/x^2} = \frac{x}{4x^3 + 1},$$

also können wir f auf ∂B als Funktion nur einer Veränderlichen beschreiben. Es ist

$$F'(x) = \frac{1 - 8x^3}{(4x^3 + 1)^2}.$$

Offenbar hat F' die Nullstelle $x_0 = 1/2$ mit dem zugehörigen y-Wert 2.

$$F''(x) = \frac{48x^2(2x^3 - 1)}{(4x^3 + 1)^3}, \qquad \text{also} \qquad F''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3} < 0,$$

also handelt es sich an der Stelle $(1/2, 2)$ um ein Maximum auf ∂B.

Lagrangeverfahren:
Setze $g(x, y) := xy - 1$, sodass $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : g(x, y) = 0\}$. **1P**
Die Lagrangebedingung lautet also (mit Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g, \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{4y}{(4x+y^2)^2} \\ \frac{4x - y^2}{(4x+y^2)^2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \textbf{2P}$$

Umstellen beider Gleichungen nach λ und Gleichsetzen ergibt

$$\lambda = -\frac{4}{(4x + y^2)^2} = \frac{4 - y^2/x}{(4x + y^2)^2}, \qquad \textbf{1P}$$

und Multiplizieren beider Seiten mit $x(4x + y^2)^2$ liefert

$$-4x = 4x - y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 8x.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $xy = 1$ führt auch dies zur Lösung (1).
(Noch **1P** für Rechnung und **1P** für Ergebnis, **1P** dafür, dass dies der einzige Lagrange-Kritische Punkt ist.)

Begründung, dass ein globales Maximum vorliegt, siehe oben.

Aufgabe I.3: **(2+8+4 Pkt.)**

In $\mathbb{R}^3$ seien die orientierten Oberflächen $S_1,\ S_2$ sowie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ gegeben. Die Flächen S_1 und S_2 seien so orientiert, dass der zugehörige Einheitsnormalenvektor jeweils eine nichtnegative z-Komponente aufweist.

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(1-z)^4 = 1,\ z \le 1\}, \\ S_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ z = 1\}, \\ \boldsymbol{v}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\iint_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$, indem Sie das Integral mithilfe eines geeigneten Integralsatzes auf ein orientiertes Kurvenintegral zurückführen.

c) Begründen Sie, warum die Integrale $\displaystyle\iint_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$ und $\displaystyle\iint_{S_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o}$ für jede Wahl des zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ übereinstimmen müssen.

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Es gilt

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \partial_y(z) - \partial_z(xz) \\ \partial_z(-yz) - \partial_x(z) \\ \partial_x(xz) - \partial_y(-yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$ **Formel: 1P, Rechnung: 1P**

b) Der Rand von S_1 ist offenbar gegeben durch $z = 1$, also (nach Definition von S_1) auch $x^2 + y^2 = 1$. Dies ist der Kreis in der durch $z = 1$ definierten Ebene, mit Mittelpunkt $(0,0,1)$ und Radius 1.
Die Randkurve ∂S_1 ist gemäß der sogenannten Rechtsschraubenregel orientiert (d.h. bei nach oben orientiertem Normalenvektor in Draufsicht im mathematischen Drehsinn).
Folgende Parametrisierung von ∂S_1 hat die gewünschte Orientierung (Or.):

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}.$$ **Kurve, Or. richtig, Or. begründet, Parametrisierung: je 1P**

Nach dem *Satz von Stokes* (namentliche Erwähnung **1P**) ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} &\overset{\textbf{1P}}{=} \oint_{\partial S_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\ \mathrm{d}t \\ &\overset{\textbf{1P}}{=} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi. \quad \textbf{1P} \end{aligned}$$

c) Variante über Stokes:
Die Randkurve ∂S_2 von S_2 stimmt genau mit ∂S_1 aus b) überein **(1P)**, und zwar nicht nur mengenmäßig, sondern auch im Umlaufsinn, da beide Flächen nach oben orientiert **(1P)**.
Nach dem Satz von Stokes gilt dann: **(1P)**

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} = \oint_{\partial S_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_{\partial S_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} \qquad \textbf{1P}$$

Variante über Satz von Gauß:
Die Flächen S_1 und S_2 bilden den Rand des Körpers

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1,\ 1-\sqrt[4]{x^2+y^2} \leq z \leq 1\right\} \qquad \textbf{(1P)}$$

wobei S_2 als oberer Rand nach außen orientiert ist, S_1 als unterer Rand jedoch nach innen. **(1P)**
Der Satz von Gauß liefert dann zusammen mit dem Zusammenhang $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0$ **(1P)**:

$$0 = \iiint\limits_K \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})}_{=0}\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial K} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{o} = -\iint_{S_1} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{o} + \iint_{S_2} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{o} \qquad \textbf{1P}$$

Teil II

Aufgabe II.1: **(9 Pkt.)**

Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z,w) \\ F_2(x,y,z,w) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w + z\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} - 1 \\ x+y+z-1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert lokal um $\boldsymbol{a} = (\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{e}}{6}, \frac{5}{6})$ eine stetig partiell differenzierbare Auflösung der Gleichung $F(x,y,z,w) \stackrel{!}{=} 0$ von der Form

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = G(x,y) = \begin{pmatrix} G_1(x,y) \\ G_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

Ergebnis:
$\frac{2}{\mathrm{e}} - 1$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Variante 1: Die Ableitungsformel des Satzes von der impliziten Funktion liefert uns den Gradienten von G und somit insbesondere die partielle Ableitung nach y:

$$DG\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right) = -\left[\left(\frac{\partial F}{\partial(z,w)}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right](\boldsymbol{a}),$$

bzw. reicht $$\frac{\partial G}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right) = -\left[\left(\frac{\partial F}{\partial(z,w)}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}\right](\boldsymbol{a}).$$ **1P**

Entsprechend berechnen wir (für Bewertung irrelevante Werte rot, **3P** part. Ableitungen, **1P** Einsetzen):

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 3z\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. reicht $$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 3z\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial(z,w)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3(w-y)} & 1 - 3z\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\partial F}{\partial(z,w)}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse $\left(\frac{\partial F}{\partial(z,w)}\right)^{-1}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2/\mathrm{e} \end{pmatrix}$ mittles Gauß – oder direkt lineares GLS zur Berechnung von $\left[\left(\frac{\partial F}{\partial(z,w)}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right](\boldsymbol{a})$, bzw. reicht $\left[\left(\frac{\partial F}{\partial(z,w)}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}\right](\boldsymbol{a})$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{e}^{-1} & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1/2 & -\mathrm{e}^{-1} & 1/2 - \mathrm{e}^{-1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/\mathrm{e} & 1 - 2/\mathrm{e} \end{array}\right)$$ **2P**

Also erhalten wir unter Berücksichtigung des Vorzeichens

$$DG\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2/\mathrm{e} & 2/\mathrm{e} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial G}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\mathrm{e} - 1 \end{pmatrix}$$ **1P**

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial G_2}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}\,,\,\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1 \qquad \textbf{1P}$$

Variante 2: Wir können unmittelbar nach z auflösen:

$$z = 1 - x - y\,. \qquad \textbf{1P} \qquad \text{(dies definiert bereits } G_1(x,y)\text{)}$$

Der implizite Zusammenhang reduziert sich somit auf

$$f(x,y,w) := w + (1-x-y)\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \textbf{1P}$$

Dies lässt sich in $\boldsymbol{a}' := (\frac{3-\mathrm{e}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ auflösen nach $w = G_2(x,y)$, wobei gemäß dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}\,,\,\frac{1}{2}\right) = -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}\right](\boldsymbol{a}')\,. \qquad \textbf{1P}$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2 - 3(x+y))\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}') = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \textbf{2P + 1P}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 1 - 3(1-x-y)\,\mathrm{e}^{-3(w-y)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(\boldsymbol{a}') = \frac{1}{2} \qquad \textbf{1P + 1P}$$

erhalten wir also

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}\left(\frac{3-\mathrm{e}}{6}\,,\,\frac{1}{2}\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1\,. \qquad \textbf{1P}$$

Aufgabe II.2: **(11 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \mathrm{e}^{x^2+3y-1}$. Geben Sie $T_{2,f,\boldsymbol{a}}(2,1)$ an, wobei $T_{2,f,\boldsymbol{a}}$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{a} := (1,0)$ sei!

Ergebnis:
$\frac{39}{2}$

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Standardweg über partielle Ableitungen:

$$f = \mathrm{e}^{x^2+3y-1} \; ;$$
$$\partial_x f = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+3y-1} \;, \qquad \partial_y f = 3\,\mathrm{e}^{x^2+3y-1} \; ;$$
$$\partial_x^2 f = (2+4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2+3y-1} \;, \qquad \partial_x\partial_y f = 6x\,\mathrm{e}^{x^2+3y-1} \;, \qquad \partial_y^2 f = 9\,\mathrm{e}^{x^2+3y-1} \; .$$

(**1P** für BEIDE richtige erste Ableitungen, **3P** für die zweiten partiellen Ableitungen)

Einsetzen des Entwicklungspunktes $\boldsymbol{a} = (1,0)$ liefert konkret

$$f(\boldsymbol{a}) = 1 \; ;$$
$$\partial_x f(\boldsymbol{a}) = 2 \;, \qquad \partial_y f(\boldsymbol{a}) = 3 \; ;$$
$$\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) = 6 \;, \qquad \partial_x\partial_y f(\boldsymbol{a}) = 6 \;, \qquad \partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) = 9 \; .$$

(An dieser Stelle gibt es [noch] keine Punkte.)

Damit lässt sich das Taylorpolynom aufstellen:

$$\begin{aligned} T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x,y) &= \sum_{i+j\le 2} \frac{(x-1)^i y^j}{i!\cdot j!}\,\partial_x^i\partial_y^j f(\boldsymbol{a}) \\ &= 1 + 2(x-1) + 3y + 3(x-1)^2 + 6(x-1)y + \frac{9}{2}\,y^2. \end{aligned}$$

(**6P** Oben berechnete Terme in richtige Taylorformel einsetzen.

Pro Term in Taylorformel gibt es einen Punkt: 1 für den konstanten Term, 2 für die linearen und 3 für die quadratischen Terme. Wurde der Entwicklungspunkt nicht berücksichtigt, d.h. Aufstellung mit x statt $(x-1)$, kann es höchstens Punkte für die reinen y-Terme geben.)

Damit erhalten wir

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}}(2,1) = 1 + 2 + 3 + 3 + 6 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2}\,. \qquad \textbf{1P}$$

Bemerkung: Bei "kleinen" Rechenfehlern, die trotz einem prinzipiell korrekten Lösungswege zu einem falschen Ergebnis führen, werden Folgefehlerpunkte großzügiger vergeben als bei falschen Ergebnissen, die auf mangelndes Verständnis zurückzuführen sind (z.B. Einsetzen des Punktes $(2,1)$ an Stellen, an denen der Entwicklungspunkt $\boldsymbol{a}$ eingesetzt werden sollte).

Weg über Exponentialreihe: Die Potenzreihe der Exponentialfunktion lautet ($z \in \mathbb{R}$)

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \qquad \textbf{1P}$$

Im konkreten Fall der Anwendung auf f ist (mittels quadratischer Ergänzung in Bezug auf den Entwicklungspunkt)

$$z = x^2 + 3y - 1 = (x-1)^2 + 2x - 1 + 3y - 1 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 3y, \qquad \textbf{3P}$$

wobei $z = 0$ für $(x, y) = \boldsymbol{a} = (1, 0)$. Um das Taylorpolynom zweiter Ordnung zu erhalten, berücksichtigen wir die Terme von *höchstens zweiter Ordnung*:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \exp((x-1)^2 + 2(x-1) + 3y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(x-1)^2 + 2(x-1) + 3y]^k}{k!} \\ &= 1 + [(x-1)^2 + 2(x-1) + 3y] + \frac{[(x-1)^2 + 2(x-1) + 3y]^2}{2} + \dots \\ &= 1 + [(x-1)^2 + 2(x-1) + 3y] + \left[2(x-1)^2 + 6(x-1)y + \frac{9}{2}y^2 + \dots\right] + \dots, \end{aligned}$$

(**1P** Auswahl $k = 0, 1, 2$, **3P+1P** Ausmultiplizieren bei $k = 2$, relevante Terme + was wegfällt)

also zusammengefasst

$$\begin{aligned} T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x,y) &= 1 + (x-1)^2 + 2(x-1) + 3y + 2(x-1)^2 + 6(x-1)y + \frac{9}{2}y^2 \\ &= 1 + 2(x-1) + 3y + 3(x-1)^2 + 6(x-1)y + \frac{9}{2}\,y^2\,, \qquad \textbf{1P} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}}(2,1) = 1 + 2 + 3 + 3 + 6 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2}. \qquad \textbf{1P}$$

Aufgabe II.3: **(5+5 Pkt.)**

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\cos^2(y)\,, \qquad y(1) = \pi.$$

Tipp: $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' = 2x + 1.$$

Ergebnis:	
a) $y(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right) + \pi$	b) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 + \dfrac{x^2}{2},\ \ c_2, c_2 \in \mathbb{R}$

Lösung (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

a) Direkte Lösung: Der Anfangswert $y_0 = \pi$ erfüllt $\cos(y_0) \neq 0$, weshalb wir die DGL mit getrennten Variablen formulieren können:

$$\frac{1}{\cos^2(y)}\, y' = x\,.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte erhalten wir nach Integration

$$\int_\pi^y \frac{1}{\cos^2(s)}\,\mathrm{d}s = \tan(y) - \tan(\pi) = \tan(y) \stackrel{!}{=} \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2-1}{2}\,.$$ **1P** Formulierung, **2P** Integration

Beim Auflösen nach y müssen wir beachten, in welchem Zweig von $\tan$ der Anfangswert liegt, hier ist $\frac{\pi}{2} < y_0 = \pi < \frac{3\pi}{2}$, also

$$y(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{2}\right) + \pi$$ **2P**

Weg über allgemeine Lösung: Neben den konstanten Lösungen $y(x) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, welche jedoch nicht zum Anfangswert passen, erhalten wir weitere Lösungen nach Trennung der Variablen und unbestimmter Integration:

$$\int \frac{1}{\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y = \tan y \stackrel{!}{=} \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$$ mit $c \in \mathbb{R}$. **1P** Formulierung, **2P** Integration+c.

Beim Auflösen sind die verschiedenen Zweige von $\tan$ zu berücksichtigen:

$$y(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{2} + c\right) + k\pi \qquad c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Der Anfangswert spezifiziert die Konstanten:

$$\pi \stackrel{!}{=} y(0) = \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{2} + c\right)}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} + k\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 1 \text{ und } c = -\frac{1}{2}\,.$$ **2P**

b) Variante mit speziellen Ansätzen:
Es liegt eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung vor.
Deren allgemeine Lösung $y(x)$ lässt sich aufteilen in einen homogenen Anteil y_h, welcher $y'' - y = 0$ löst, sowie eine partikuläre Lösung y_p der eigentlichen DGL: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
Homogene Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = (\lambda + 2)\lambda,$$

zu den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 0$ gehören die (homogenen) Fundamentallösungen

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = 1 \qquad \textbf{2P}$$
$$(\rightsquigarrow \quad y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Partikuläre Lösung: Wir wählen den Ansatz vom Typ der rechten Seite, finde also ein Polynom y_p, welches die DGL löst. Konkret mit $y_p(x) = ax^2 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, (Konstanten erfuellen bereits die homogene DGL, deshalb Start ab Monomen vom Grad 1) erhalten wir

$$2a + (4ax + 2b) \stackrel{!}{=} 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4a \stackrel{!}{=} 2 \text{ und } 2a + 2b = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{2} \text{ und } b = 0\,. \qquad \textbf{2P}$$

Mit $y_p(x) = \frac{x^2}{2}$ führt dies auf die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2 + \frac{x^2}{2}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{1P}$$

Variante als DGL-System: Mit $\boldsymbol{z} = (y, y')^\top$ schreiben wir

$$\boldsymbol{z}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \boldsymbol{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2x+1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{b}(x)}. \qquad \textbf{1P}$$

Charakteristisches Polynom und Eigenwerte:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda + 2)\,.$$

Wir haben also die einfachen Eigenwerte -2 und 0.
(Diese sind alternativ bereits an der Hauptdiagonale der oberen $\triangle$-Matrix A ablesbar).
Eigenräume / Eigenvektoren der Systemmatrix:

$$E_{-2}(A) = \ker(A + 2I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$E_0(A) = \ker A = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Homogene) Fundamentallösungen / Fundamentalmatrix:

$$\boldsymbol{z}_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Z(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 1 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{1P}$$

Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_p(x) &= Z(x)\int [Z(x)]^{-1}\boldsymbol{b}(x)\,\mathrm{d}x = Z(x)\int \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{e}^{2x} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x+1 \end{pmatrix}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}Z(x)\int \begin{pmatrix} -(2x+1)\mathrm{e}^{2x} \\ 2x+1 \end{pmatrix}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 1 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x\,\mathrm{e}^{2x} \\ x^2 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \end{pmatrix} \qquad \textbf{2P} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{z}(x) = Z(x)\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{z}_p(x)\,, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 \qquad \rightsquigarrow \quad y(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 + \frac{x^2}{2}\,. \qquad \textbf{1P}$$

Aufgabe II.4: **(10 Pkt.)**

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1,\ x>0,\ 0 < z\sqrt{x^2+y^2} < y\right\}.$$

Ergebnis:
1

Lösungsweg (ggf. bitte auch Rückseite verwenden):

Rechnung in Winkel-/Kugelkoordinaten:

Parametrisierung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \textbf{1P} \qquad \text{Alternativ:} \quad \psi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Parameterbereich:

Der Grundbereich $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für die Gesamtkugel muss eingeschränkt werden.

- Es sind insbesondere $x, y, z > 0$, daher $\varphi, \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$. **1P**
- Die Bedingung $z\sqrt{x^2+y^2} < y$ lautet in der Parametrisierung:

$$\sin\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta} \overset{\vartheta\in(0,\frac{\pi}{2})}{=} \sin\vartheta\cos\vartheta \overset{!}{<} \sin\varphi\cos\vartheta \overset{\vartheta\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Longleftrightarrow} \sin\vartheta < \sin\varphi \overset{\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Longleftrightarrow} \vartheta < \varphi \qquad \textbf{3P}$$

Die Parameter stammen also aus dem Normalbereich

$$B := \left\{(\varphi,\vartheta) \colon 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \vartheta < \varphi\right\}. \qquad \left(\text{bzw.} \quad \widetilde{B} := \left\{(\theta,\varphi) \colon 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} - \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}\right)$$

Flächenelement:

$$\phi_\varphi \times \phi_\vartheta = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \cos\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\phi_\varphi \times \phi_\vartheta\| = |\cos\vartheta| \overset{|\vartheta|\leq\pi/2}{=} \cos\vartheta \qquad \textbf{2P} \qquad (\text{bzw.} \quad \|\psi_\theta \times \psi_\varphi\| = \sin\theta)$$

Flächenformel:

$$F(S) = \iint_S 1\,\mathrm{d}o = \iint_B \|\phi_\varphi \times \phi_\vartheta\|\,\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) \qquad (\textbf{1P} \text{ Formel, zumindest Anwendung erkennbar})$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\varphi} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1. \qquad \textbf{2P} \text{ Rechnung}$$

Alternative Schachtelung:

$$F(S) = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \left(\int_\vartheta^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \left[\sin\vartheta \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot (-1)\,\mathrm{d}\vartheta = 0 + 1 = 1.$$

Rechnung in Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$:

- Insbesondere $x, y, z > 0$, daher $r > 0$ und $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. **1P**
- Sphärengleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ übersetzt sich in $r^2 + z^2 = 1$, also aufgelöst $r = \sqrt{1-z^2}$, oder $z = \sqrt{1-r^2}$ (wegen $z > 0$ nur ein Zweig) mit $r, z \in (0, 1)$. **1P**
- Die Bedingung $z\sqrt{x^2+y^2} < y$ übersetzt sich in

$$z \cdot r < r\sin\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad z < \sin\varphi \qquad \textbf{2P}$$

Alternativ fortgesetzt: $\sqrt{1-r^2} < \sin\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad r > \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi$

Variante: Parametrisierung bzgl. (φ, z):

$$\Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos\varphi \\ \sqrt{1-z^2}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \textbf{1P}$$

$$\rightsquigarrow \quad \Phi_\varphi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2}\sin\varphi \\ \sqrt{1-z^2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\varphi \\ -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos\varphi \\ \sqrt{1-z^2}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\varphi, z)$$

$$\rightsquigarrow \quad \|\Phi_\varphi \times \Phi_z\| = 1 \qquad \textbf{2P}$$

$$F(S) \;=\; \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\varphi} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1\,. \qquad \textbf{1P}\text{ Formel} + \textbf{2P}\text{ Rechnung}$$

Alternative Schachtelung:

$$F(S) \;=\; \int_0^1 \int_{\arcsin z}^{\frac{\pi/2}{\mathrm{d}}} z\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^1 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin z\right)\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \left[z \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin z\right)\right]_0^1 + \int_0^1 z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z \;=\; 0 + \left[-\sqrt{1-z^2}\right]_0^1 \;=\; 1\,.$$

Parametrisierung bzgl. (r, φ):

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt{1-r^2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1P)} \rightsquigarrow \quad \Psi_r \times \Psi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\cos\varphi \\ \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \|\Psi_r \times \Psi_\varphi\| = \sqrt{\frac{r^4}{1-r^2} + r^2} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \quad \textbf{2P}$$

$$F(S) \;=\; \int_0^{\pi/2}\int_{\cos\varphi}^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{\cos\varphi}^1 \mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \;=\; 1$$

1P Formel + **2P** Rechnung

Alternative Schachtelung (beachte, dass $\cos$ monoton fallend):

$$F(S) \;=\; \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\int_{\arccos r}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \;=\; \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arccos r\right)\,\mathrm{d}r$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \left[-\sqrt{1-r^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arccos r\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\sqrt{1-r^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r \;=\; 0 + 1 \;=\; 1\,.$$

Rechnung in kartesischen Koordinaten: (Hier weniger Punkte zur Vordiskussion)

- Die Bedingung $z\sqrt{x^2+y^2} < y$ ist äquivalent zu $z\sqrt{1-z^2} < y$ **1P**
- Es bietet sich die Auflösung $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ an, mit Parametern $y, z > 0$, $y^2+z^2 < 1$. **1P**
- Äußere Variable $z \in (0,1)$, innere Variable $y < \sqrt{1-z^2}$ (zusätzlich zu erster Bedingung) **1P**

$$\gamma(y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-y^2-z^2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \|\gamma_y \times \gamma_z\| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \qquad \textbf{1P+2P}$$

$$\begin{aligned} F(S) &= \int_0^1 \int_{z\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{y=\sqrt{1-z^2}\sin t}{=} \int_0^1 \int_{\arcsin z}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 1\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin z\right)\,\mathrm{d}z \overset{\text{P.I.}}{=} 0 + \int_0^1 z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z = \Big[-\sqrt{1-z^2}\Big]_0^1 = 1\,. \end{aligned}$$

1P Formel + **3P** Rechnung

oder bzgl. (x,y) ganz ähnlich parametrisiert:

- $z\sqrt{x^2+y^2} < y \iff \sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2} < y \iff x^2+y^2-(x^2+y^2)^2 < y^2$ $\iff x < x^2+y^2 \iff y > \sqrt{x(1-x)}$ **1P**
- $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ mit $x \in (0,1)$ und $y < \sqrt{1-x^2}$ **2P**

$$\begin{aligned} F(S) &= \int_0^1 \int_{\sqrt{x(1-x)}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{y=\sqrt{1-x^2}\sin t}{=} \int_0^1 \int_{\arcsin\sqrt{x(1-x)}}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} \left[x\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{x=s^2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+s^2}\right)\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4} + \Big[s - \arctan(s)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1\,. \end{aligned}$$

1P Formel + **3P** Rechnung

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4+4+4 Pkt.)**

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. Wenn die Aussage falsch ist, kann dies z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels geschehen.

a) Es sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\boldsymbol{v}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$.
Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\boldsymbol{v}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0, 0) = 1$ und $f(\boldsymbol{x}) > \|\boldsymbol{x}\|_2$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{x}\|_2 \geq 1$. Dann gibt es ein $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

c) Das Anfangswertproblem

$$y' = |y|^{4/5}, \quad y(0) = 0$$

besitzt genau eine Lösung.

d) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2xy + y^2 + 1 \\ 2xy + x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

besitzt auf dem abgeschlossenen Gebiet $D := [0, 1]^2$ genau einen Fixpunkt.

e) Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Körper. Der Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \partial K$, zeige nach außen. Ferner sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beliebig oft differenzierbar und es gelte für alle $\boldsymbol{x} \in K$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) > 0.$$

Dann gilt

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} > 0.$$

Lösen Sie diese Aufgabe auf dem nachfolgenden Antwortblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe III.1
Tragen Sie "W" für wahr und "F" für falsch in die erste Spalte ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung im zugehörigen Kästchen der zweiten Spalte.

a) F	Da $\boldsymbol{v}$ stetig differenzierbar ist, wäre f zweimal stetig differenzierbar, also müsste nach dem Satz von Schwarz gelten $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, also $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$. *Oder:* Die skalare Funktion f wäre ein Potential von $\boldsymbol{v}$. Damit ein solches existiert, müsste für ein stetig differenzierbares Vektorfeld notwendigerweise die Integrabilitätsbedingung $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$ erfüllt sein. **1P** Es gilt jedoch $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = x^2$ und $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = y^2$. Diese Funktionen stimmen nicht überein. **2P** --- <u>Über unbestimmte Integration:</u> Für ein Potential f müsste folgendes gelten: $f(x,y) = \int v_1 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3 y}{3} + C(y)$ und $f(x,y) = \int v_2 \,\mathrm{d}y = \frac{xy^3}{3} + D(x)$. **1P** Gleichheit würde $C(y) - D(x) = \frac{x^3 y - xy^3}{3}$ implizieren, jedoch ist dieser Ausdruck keine Summe von Termen, die nur von x bzw. y abhängen. Dies ist ein Widerspruch. **2P** --- <u>Oder:</u> $f(x,y) = \int v_1 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3 y}{3} + C(y)$ impliziert $v_2 = xy^2 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + C'(y)$. **1P** $\Longrightarrow \quad C(y) = \int xy^2 - \frac{x^3}{3} \,\mathrm{d}y = \frac{xy^3 - x^3 y}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$. **1P** Dies ist ein Widerspruch, weil $C(y)$ scheinbar doch noch von x abhinge. **1P**
b) W	Laut Voraussetzung gilt für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\\|\boldsymbol{x}\\|_2 \geq 1$, dass $f(\boldsymbol{x}) > 1$. **1P** Setzt man nun $D := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \\|\boldsymbol{x}\\|_2 \leq 1\}$, so folgt wegen $(0,0) \in D$ und $f(0,0) = 1$, dass $\inf f = \inf f\|_D$. **1P** Da f stetig ist und D beschränkt und abgeschlossen (kompakt), gibt es ein $\bar{\boldsymbol{x}} \in D$ mit $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \min f\|_D$ (Weierstraß), zusammengefasst also $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf f$. **1P**
c) F	In der Tat lösen sowohl $y \equiv 0$ **(1P)** als auch $y(x) := \left(\dfrac{x}{5}\right)^5$ **(2P)** das Anfangswertproblem.
d) W	In der Tat gilt für $(x,y) \in D$: $\displaystyle 0 < \frac{1}{7} \leq \frac{1}{7}(2xy + y^2 + 1) \leq \frac{4}{7} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{2}{7} \leq \frac{1}{7}(2xy + x^2 + 2) \leq \frac{5}{7} < 1,$ also $f(D) \subset D$ (Selbstabbildung). **1P** Ferner bestimmen wir eine Lipschitz-Konstante z.B. bzgl. der ∞-Norm (gleiches Ergebnis für die 1-Norm): $\displaystyle \\|Df(x,y)\\|_\infty = \frac{1}{7} \left\\| \begin{matrix} 2y & 2x + 2y \\ 2y + 2x & 2x \end{matrix} \right\\|_\infty \overset{x,y \in [0,1]}{\leq} \frac{1}{7} \cdot (2+4) = \frac{6}{7} =: L < 1.$ **1P** Also ist f eine Konstraktion auf D und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt von f auf D. **1P**
e) W	In der Tat bedeutet die gegebene Ungleichung $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) > 0$. **1P** Der Satz von Gauß ist anwendbar und liefert $\displaystyle \iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{o} = \iiint_K \underbrace{\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}_{>0} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} > 0.$ **2P**

Für jede Aufgabe gibt es **1P** auf die richtige Antwort (W oder F),
sowie **3P** für eine vollständige Begründung.